《线性代数与解析几何》期中考试试题 （A）（2011.11.18）

学生所在院系：______________ 学号：______________ 姓名：______________

一 (30 分)、已知点 $A(1,2,3)$, $B(2,1,4,)$, $C(1,3,5)$, $D(3,2,1)$. 求

1. B,C 所在直线 L 的方程和 A,B,C 所在平面 Π 的方程;
2. $\triangle ABC$ 的面积 S 、 $\angle ABC$ 和四面体 $ABCD$ 的体积 V ;
3. A 到 L 的距离、 D 到 Π 的距离和直线 AB 与 CD 之间的距离;
4. 过 A,B,C,D 的球面的方程和过 A,B,C 的圆的方程;
5. 直线 AB 绕 CD 旋转一周所得曲面的方程，并指出曲面的类型.

二 (20 分)、 1. 当 a,b 分别取何值时，线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ (b-1)x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + (1-b)x_3 = 3-2b \end{cases}$

有解，并求出其所有解;

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 解矩阵方程 $X(I - B^{-1}A)^T B^T = I$.

三 (30 分)、设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times m}$. 若 $D_1 = det(I_m - AB)$, $D_2 = det(I_n - BA)$, $r_1 = r(I_m - AB)$ 和 $r_2 = r(I_n - BA)$ 已知.

1. 求 D_1 与 D_2 及 $det\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 之关系和 r_1 与 r_2 及 $r\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 之关系；并求

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_m \\ b_1 & b_2 & ... & b_m & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & ... & -a_1b_m \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & ... & -a_2b_m \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_mb_1 & -a_mb_2 & ... & 1-a_mb_m \end{pmatrix}$ 的秩和行列式;

2. 证明：当 $m = n$ 时， $det(AB) = det(A)det(B)$; 并求 $det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$;

当 $m \neq n$ 时，给出关于 $det(AB)$ 的结论并证明之.

四 (30 分)、 1. 计算 n 阶 $Vandermonde$ 行列式 $V_n(a_1,a_2,...,a_n)$,

并求 $D=det\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^4\end{pmatrix}$;

2. 设 $A_n=\begin{pmatrix}a & b & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ c & a & b & ... & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & a & ... & 0 & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & a & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & ... & c & a & b\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & c & a\end{pmatrix}$, 求 $det(A_n)$;

当 $a=2,b=c=1$ 时，求 A_n^{-1}.

《线性代数与解析几何》期中考试试题 （B）（2011.11.18）

学生所在院系：______________ 学号：______________ 姓名：______________

一 (30 分)、已知点 $A(1,2,3)$, $B(2,1,4,)$, $C(1,3,5)$, $D(3,2,1)$. 求

1. C,D 所在直线 L 的方程和 B,C,D 所在平面 Π 的方程;
2. $\triangle BCD$ 的面积 S 、 $\angle BCD$ 和四面体 $ABCD$ 的体积 V ;
3. B 到 L 的距离、 A 到 Π 的距离和直线 AD 与 BC 之间的距离;
4. 过 A,B,C,D 的球面的方程和过 B,C,D 的圆的方程;
5. 直线 AD 绕 BC 旋转一周所得曲面的方程，并指出曲面的类型.

二 (20 分)、 1. 当 λ,μ 分别取何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x + \mu y + 2z = 1 \\ (\mu-1)y + z = 0 \\ \lambda x + \mu y + (1-\mu)z = 3-2\mu \end{cases}$ 有解，并求出其所有解;

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 解矩阵方程 $X(I-A^{-1}B)^T A^T = I$.

三 (30 分)、设 $A=(a_{ij})_{n\times m}, B=(b_{ij})_{m\times n}$. 若 $D_1 = det(I_n - AB)$, $D_2 = det(I_m - BA), r_1 = r(I_n - AB)$ 和 $r_2 = r(I_m - BA)$ 已知.

1. 求 D_1 与 D_2 及 $det\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$ 之关系和 r_1 与 r_2 及 $r\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$ 之关系；并求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & \dots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & \dots & -a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \dots & 1-a_nb_n \end{pmatrix}$ 的秩和行列式;

2. 证明：当 $m=n$ 时， $det(AB)=det(A)det(B)$; 并求 $det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$;

当 $m \neq n$ 时，给出关于 $det(AB)$ 的结论并证明之.

四 (30 分) 、 1. 计算 n 阶 $Vandermonde$ 行列式 $V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$,

并求 $D = det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix}$;

2. 设 $A_n = \begin{pmatrix} b & c & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a & b \end{pmatrix}$, 求 $det(A_n)$;

当 $a = c = 1, b = 2$ 时，求 A_n^{-1}.