中 国 科 学 技 术 大 学
2012 - 2013学年第二学期期终考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1)　　　　得分:__________

学生所在院系:__________　姓名:__________　学号:__________

装订线 • 答题时不要超过此线

一、【25分】填空题:

(1) 设向量$(1,6,\lambda)$落在由向量组$\{(1,2,3),(1,-2,3),(4,4,12)\}$ 生成的线性子空间内, 则$\lambda=$ ________.

(2) 设$P_2[x]$是次数不超过二次多项式的全体构成的线性空间, 则从基$\{(1-x)^2, 2(1-x)x, x^2\}$到基$\{1,x,x^2\}$的过渡矩阵是 __________.

(3) 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值, 则$\det(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=$ __________.

(4) 设n阶实对称方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$, 则$\boldsymbol{A}$的相合规范形为 ________.

(5) 实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+(x_3+tx_1)^2$正定的充要条件是参数$t$满足__________.

二、【25分】判断下列命题是否正确, 并简要地给出理由.

(1) 若向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示, 则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$线性无关.

(2) 设$F^{n\times n}$是所有n阶方阵全体按矩阵线性运算所构成的线性空间, W是所有行列式为零的n阶方阵全体, 则W是$F^{n\times n}$的子空间.

(3) 若$\mathbf{R}_n[x]$是次数不超过n的实系数多项式构成的实线性空间, $\mathcal{D}$是$\mathbf{R}_n[x]$上的微分(求导)运算, 则$\mathcal{D}$是线性变换.

(4) 有限维欧氏空间的不同标准正交基之间的过渡矩阵是正交阵.

(5) 设$\boldsymbol{A}$为m阶实对称方阵, $\boldsymbol{B}$为n阶实对称方阵, 且分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$正定, 则方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$皆正定.

三、【10分】给定对角矩阵$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(1,1,2)$, 令$V$是所有与$\boldsymbol{A}$都可以交换的三阶实对称方阵全体.

1. 证明：在矩阵通常的数乘与加法运算下, V构成实数域上的一个线性空间.
2. 求V的维数与一组基.

四、【16分】设$\boldsymbol{\gamma}$是n维欧氏空间V中的单位向量, 定义V上的线性变换$\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}.$$

(1) 证明: $\mathscr{A}$是一个正交变换.

(2) 设$\boldsymbol{\beta}$是$\mathbf{R}^n$中一个单位列向量, 证明: 存在V的一组标准正交基, 使得$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为$\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(3) 求$\mathscr{A}$的特征值与特征向量.

五、【14分】给定二次曲面在直角坐标系下的方程

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0,$$

将它通过正交变换化为标准方程, 并指出该二次曲面的类型.

六、【10分】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵, $\boldsymbol{A}$有n个互异的特征值, 且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 证明:

(1) $\boldsymbol{B}$相似于对角阵;

(2) 存在唯一的次数不超过$n-1$的多项式$f(x)$, 使得$\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$.