DFA = NFA, CFL = PDA, RE ⇔ DFA ⇔ RL

state → 字母

$Q, \Sigma, \delta, q_0, F$ → 接受 DFA、NFA

$Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F$ PDA　　$\bigcirc \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon\to\$} \bigcirc$

stack $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to P(Q \times \Gamma_\varepsilon)$

CFL⇔PDA: PDA → A_{pq} gen x, x brings A from p to q

A_{pq}: p空到q空, A_{pq}: A_{pr}, A_{rq} 或 $aA_{rs}b$
(1+ k steps　1+k steps)

DPDA: δ表不可有 ϕ, 0^n1^n 可为 DPDA, $a^ib^jc^k$, i=j or j=k 不可.

CFL: V, Σ terminals, R rules, S∈V start, Variables

TM: $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$
input, no ⊔　tape, ⊔　$Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

nTM → TM: 模拟, 1带输入, 2带模拟, 3带地址

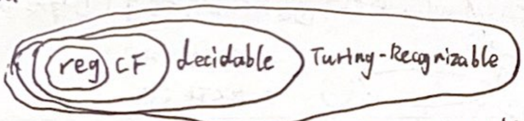
TM:
M = "输入 … :
1. …
2. …… "

Decidable: $A_{DFA} = \{\langle B, w\rangle \mid B, DFA, \text{accepts string } w\}$
A_{NFA}: NFA→DFA
A_{REX}: REX→NFA
$E_{DFA} = \{\langle A\rangle \mid A\ DFA, L(A) = \phi\}$
$EQ_{DFA} = \{\langle A, B\rangle \mid A、B\ DFA, L(A) = L(B)\}$
$L(C) = (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$
$L(C) = \phi$ iff $L(A) = L(B)$

$A_{CFG} = \{\langle G, w\rangle \mid G\ CFG, \text{generates string } w\}$
G→CNF, 可在2n-1步内列出所有派生

$E_{CFG} = \{\langle G\rangle \mid G\ CFG, L(G) = \phi\}$
从Terminal开始mark, 若S未被mark, acc

EQ_{CFG} undecidable!



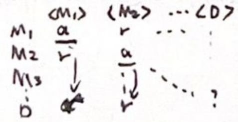
$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M\ TM, \text{accepts } w\}$, Rec but undecidable.

Q $\frac{m}{n}$ 可数, 对角线 $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} \cdots$ / $\frac{2}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{2}{3} \cdots$ 按对角线

R不可数: 对角化, 假设有f对应, 有一个数不在其中.

部分语言不是Turing-Rec的. 证明: ① All TM 可数(编码)
② All languages 不可数, 两者不相同.

why A_{TM} 不可判定? 对角化. 假设 $H(\langle M, w\rangle)$ 判定 A_{TM}, 则
TM D: Run H on $\langle M, \langle M\rangle\rangle$, 输出相反结果, 则 $D(\langle D\rangle)$ acc if D不接受$\langle D\rangle$
D rej 当 D acc D, 矛盾.



无法找到D
矛盾

co-Turing-Rec: 语言补是 Turing Rec 的.
语言可判定 iff 语言 TR 和 cTR
→: M decider, w∈A acc, w∉A rej
←: M_0 rec A, M_1 rec $\overline{A}$, H = M_0 和 M_1, 若 M_0 acc 则 acc, M_1 acc 则 rej

$\overline{A_{TM}}$ not TR: 由于 A_{TM} TR, 若 $\overline{A_{TM}}$ TR 则 A_{TM} decidable, 矛盾.

归约: A reducing to B: B的解可用于解A. A不比B难.

undecidable:
$HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M\ TM, M \text{ halts on input } w\}$
证: reduce $A_{TM} \to HALT_{TM}$, 假设R decide $HALT_{TM}$, 则用$\langle M, w\rangle$ 跑R, reject则rej, accept后跑M在w至停机, 输出M结果, 则 A_{TM} 可判定, 矛盾.

$E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M\ TM \text{ and } L(M) = \phi\}$
证, 假设R deci E_{TM}, TM M_1: x≠w rej, x=w 后跑M on w 若M acc 则 acc; TM S: $\langle M, w\rangle$, Run R on M_1, 输出相反结果, S dec A_{TM}

$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1、M_2\ TM, L(M_1) = L(M_2)\}$
证, 设R decide EQ_{TM}, 则TM S: $\langle M, M_1\rangle$, M_1 rej all inputs, 则 E_{TM} decidable, 矛盾

ALL_{CFG}、EQ_{CFG} (见作业右上)(5.1)

PCP问题 = {⟨P⟩ | P是PCP的一个有匹配的实例}.
MPCP: 匹配从第一块多米诺开始.
证、假设R dec MPCP, 可得 TM S decide A_{TM}
S构造了P′模拟M在w上的计算, 之后将P′→P, PCP实例

Mapping Reducibility 映射可归约性:
Lang A→B, 记为 $A \le_m B$, 若可计算函数 $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$, 对任每个 w,
$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$. 称f为A到B的归约, 例: $A_{TM} \le_m MPCP \le_m PCP$

定理: if $A \le_m B$ 且 B deci, 则 A deci. 证: M是B decider, 在M上跑f(w) 可decide A.

例: $HALT_{TM}$: 若A undec, 则B undeci, 构造 F: ⟨M, w⟩,
在M′中, M接受x则acc, 拒绝则loop, 输出⟨M′, w⟩, $A_{TM} \le_m HALT_{TM}$.
~~$A_{TM} \le_m \overline{E_{TM}}$~~, $E_{TM} \le_m$ ~~$\overline{EQ_{TM}}$~~ EQ_{TM}, $A_{TM} \le_m \overline{E_{TM}}$
~~若B非TR, 则 $A \le_m B$, 则~~ 若 $A \le_m B$ 且 B TR, 则 A TR.
若 $A \le_m B$ 且 B 非TR, 则 A 非TR.
若 $A_{TM} \le_m \overline{B}$, 则 B 非TR ($A \le_m B \Leftrightarrow \overline{A} \le_m \overline{B}$, $\overline{A_{TM}}$ 非TR)

EQ_{TM} 非TR也非cTR. 证、$A_{TM} \le_m \overline{EQ_{TM}}$
TM F: M_1 rej 所有, M_2 在M上跑w, 若acc则acc, $\langle M_1, M_2\rangle$
TM G: M_1 acc 所有, M_2 在M上跑w, ……, $\langle M_1, M_2\rangle$

Class P: 单带TM多项式判定　Class NP: 无多项式时间算法
PATH, RELPRIME, CFL　(HAMPATH, COMPOSITES, CLIQUE, SUBSET-SUM)

Reduction: 3SAT $\le_p$ CLIQUE (SAT $\le_p$ 3SAT), 3SAT $\le_p$ HAMPATH,
3SAT $\le_p$ SUBSET-SUM.

NPC: 画圈的加上VERTEX-COVER.

大O: $f(n) \le cg(n)$ 当 c、n_0 为正整数, $n \ge n_0$ 时成立

小o: 任 c>0 实数, 有 n_0 使 $f(n) < cg(n)$ 对 $n \ge n_0$ 成立.

k-Tape $t(n)$, 1-Tape $O(t^2(n))$

non-dTM $t(n)$, 1-Tape $2^{O(t(n))}$

PATH: 有向图路径, 标记法　RELPRIME: ⟨x, y⟩互质, 令两者互模, 结果为1则互质

任何CFL都是P, 用动态规划

HAMPATH: 有向图走各点、仅一次可验证, COMPOSITES = {x | x = pq, p, q 大于1整数}

NP: 有多项式时间验证器的一类语言.

CLIQUE: 有k个点的完全图子图. SUBSET-SUM: 有没有y中 $\Sigma y_i = t$ 子集.

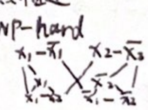
Polynomial Time Reducibility: $A \le_p B$, 若f为多项式时间可计算, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$
f为多项式时间归约

定理: if $A \le_p B$, 且 B∈P, 则 A∈P, 在M上跑f(w)即可.

3-CNF: $(\vee_1 \vee) \wedge (\vee_2 \vee) \cdots_k$ 若有k-clique, 非自身点相连

NPC: 任NP问题 $A \le_p B$, B为NPC. 若B不为NP, 则为NP-hard

VERTEX-COVER: 节点, 所有边接触一个点., NPC



作业，

0.3、$A\times B=\{(x,x),(x,y),(y,x)\cdots\}$

power set B: $C=\{\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$

0.7、关系：$S=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

a、自反对称不传递：$\cap=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S, x\cap y\neq\phi\}$

b、…… 不对称：$\leq=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S, x\in y\}$

c、…… 不自反：$\odot=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in S, |x|\cdot|y|=2k+1, k\in Z\}$

NFA→DFA：画转移表，带 ϕ

δ	a	b
1	·	·
2	·	·
	·	·

DFA→RE：加起点 S，加终点 a，删点、

非正则语言，pumping lemma 泵引理、

存在泵长度，分解 $s=xyz$，使 $xy^iz\in A$，$|y|>0$，$|xy|<p$

1.29：$A=\{0^n1^n2^n \mid n\geq 0\}$，分情况 $0^p1^p2^p$，y 包含 1.2.3 种，不 RE

2.9：$a^ib^jc^k$，$j=i$ or $j=k$，$i,j,k\geq 0$

$S\to M|N \quad M\to aMb|Mc|\varepsilon \quad N\to bNc|aN|\varepsilon$

模糊，多种方式生成 aabbcc

2.10：2.9 结合 $a^ib^ic^j$ 和 $a^ib^jc^j$ 的栈子

非形式化用语言，形式化画图。

2.14：CFG→CNF：

$A\to BAB|B|\varepsilon$

$B\to 00|\varepsilon$

① 加起始：$S\to A$

② 除空串：

$S\to A$
$A\to BAB|B|\varepsilon$
$B\to 00|\varepsilon$

$S\to A$
$A\to BAB|B|AB|BA|A|\varepsilon$
$B\to 00|\cancel{\varepsilon}$

$S\to A|\varepsilon$
$A\to BAB|B|AB|BA|A|\cancel{\varepsilon}$
$B\to 00$

↓

$S\to BAB|B|AB|BA|\varepsilon$
$A\to BAB|B|AB|BA|$
$B\to 00$

③ 除单元：$S\to BAB|00|AB|BA|\varepsilon$

规则 $A\to BAB|AB|BA|00$

$B\to 00$

↓

④ 合理形式：

$S\to BA_1|AB|BA|00|\varepsilon$
$A\to BA_1|AB|BA|00$ →
$A_1\to AB$
$B\to 00$

$S\to\cdots|LL|\varepsilon$
$A\to\cdots|LL$
$A_1\to AB$
$B\to LL$
$L\to 0$

2.33、$F=\{a^ib^j \mid i=kj, k>0\}$ 上下文无关：

泵引理：$s=uvxyz$，$\forall i\geq 0$，$uv^ixy^i\in F$，$|vy|>0$，$|vxy|\leq p$ 成立

反证：令 F 上下文无关，p 为 pL，$q>p$，p 素数，令 $s=a^{q^2}b^q\in F$，$s=uvxyz$

① v、y 不可同时包含 a、b（违反先 a 后 b）

② $v=a^*$，$y=b^*$ 且不同时为空，$|v|+|y|>0$ 且 $\leq p$，则 $|uxz|_a=q^2-|v|$

$|uxz|_b=q-|y| \Rightarrow |s_i|_a=q^2+(i-1)|v|$，$|s_i|_b=q+(i-1)|y|$

$s_i\in F \Rightarrow q+(i-1)|y| \mid q^2+(i-1)|v| \quad (\forall i\geq 0)$，则 $|v|,|y|\neq 0$

令 $i-1=q^2 \Rightarrow q+q^2|y| \mid q^2+q^2|v| \Rightarrow 1+q|y| \mid q+q|v| \Rightarrow 1+q|y| \mid q|y|-|v|$

由于 $0<q|y|-|v|<q|y|+1$ ∴ $q|y|-|v|=0 \Rightarrow |v|=q|y|\geq q$，矛盾

③ 若 v、y 包含同种字符（其中之一可为空）

均为 a：② 中 令 $|vy|=|v|$，$|y|=0$，矛盾

均为 b：② 中 $|v|=0$，$|vy|=|y|$，矛盾

综上，F 非上下文无关

3.2、TM 转移要 reject，$q_1 1\to xq_3 1\to x1q_3\sqcup\to x1\sqcup$ reject

4.1、is $\langle M, \cancel{0100}\rangle\in A_{DFA}$？否，输入仅一个分量

is $\langle M, 0100\rangle\in A_{REX}$？否，第一个分量不是正则表达式

4.6、one-to-one，injective，单射，$a\neq b$ 则 $f(a)\neq f(b)$

满射，onto，surjective，$\forall b$，$a\in A\to f(a)=b$）

4.7、对角化证明 $\{0,1\}$ 上无限序列集合不可数。

n	f(n)
0	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\cdots$
1	$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\cdots$
2	$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\cdots$
…	

令 $b=b_1b_2b_3\cdots$，$b_i\neq a_{ii}$，则 b 无法加入映射

无 $f(n)=b$，不可数。

5.1、EQ_{CFG} 不可判定：由书 5.10 知 ALL_{CFG} 不可判定，假设 EQ_{CFG} 可判定，在字符集上构造可产生全部串的 CFG A，用 TM M 判断 E 和输入是否相等，则 ALL_{CFG} 可判定，矛盾。

5.7、A 可识别，$A\leq_m\bar{A}$，证 A 可判定

由于 $A\leq_m\bar{A}$，对 $w\in A$ $f(w)\in\bar{A}$，$w\notin A$ $f(w)\notin\bar{A}$，构造 TM M 同时输入 w 和 $f(w)$，若接受 w 接受，接受 $f(w)$ 拒绝，则 A 可判定。

7.1、c：$n^2\neq O(n\log^2 n)$，

对任 $\varepsilon>0$，$n>1$，$cn^\varepsilon>\log^k n$，证：$n^{\varepsilon/k}>\log n^{\varepsilon/k}\Rightarrow n^\varepsilon>(\frac{\varepsilon}{k})^k\log^k n$

7.9、图中是否有三角形：

① 枚举 3 点集合 $O(V^3)$，② 逐个判断是否满足 $O(E)$，P 问题。

$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

试题：

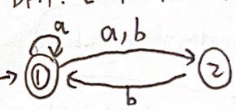
1、$(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee y)\wedge(x\vee\bar{y})$ 是否可满足？为何？

2、decidable，undecidable but TR，non TR？无需证明

A_{DFA}，EQ_{DFA}，E_{DFA}，ALL_{DFA}，A_{CFG}，EQ_{CFG}，E_{CFG}，A_{TM}，EQ_{TM}，E_{TM}.

注：A_{TM}、EQ_{TM} 非补图灵可识别。

3、画 DFA：$\{w \mid w$ 恰好不包含 2 个 a 的任意串$\}$，字母表 $\{a,b\}$

4、

1、NFA 转 DFA？

2、DFA 转正则

5、PDA 非形式化描述：$\{a^ib^jc^k \mid i\geq 1, j,k\geq 0$ 且 $(i=j$ 或 $j=k)\}$

6、证明 E_{TM} undecidable.

1、可 2、纸上有 3 略 4.2 $(bb)^*\cup(bb)^*a(a^*b^*)^*$

5、略（两种语言 PDA 拼起来） 6、纸上有