# 数理逻辑期末考试汇总

Hank Wang

2020 年 9 月 10 日

## 1 2020年春季期末

1 判断题(21分)

(1) 命题演算L的三条公理模式是相互独立的.

(2) 已知$\Gamma$和$\Sigma$都是相容公式集, 若$\Gamma \cup \Sigma$是不相容公式集, 则存在公式$q$使得$\Gamma \vdash q$且$\Sigma \vdash \neg q$.

(3) 不含否定词的命题公式都是可满足公式.

(4) $K_N$的所有模型中, 等词一定解释为论域上的相等关系.

(5) $\forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x)) \to \forall x \exists y R(x, y)$是逻辑有效式.

(6) 重言式集合是命题语言范围内逻辑推理规律的形式化表达.

(7) 哥德尔不完备性定理证明中的不可判定命题是一个真命题.

2 简答题(12*2分)

(1) 简述关于逻辑研究内容的三种主要观点. "公设"在应用逻辑系统中的作用是什么. 并举例说明.

(2) 严格地说, 什么是"证明". 关于"证明"与"计算"之间关系已得到一些严格证明结果. 描述一个一阶逻辑中的, 得到严格证明的结果.

3 直接证明

$$\vdash (\neg p \to p) \to (q \to p)$$

4 三个箱子, 有且只有一个里面有金子. 三句话有且只有一个是真话:

(1) 第二个箱子没有金子

(2) 第二个箱子有金子

(3) 第一个箱子没有金子

请使用命题演算证明哪个箱子里有金子.

5 证明

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2)) \to (\exists x_1 R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1))$$

6 证明

$$\mathcal{N} \vdash \overline{0} \times x \approx \overline{0}$$

## 2 2018年春季期末

1 判断题(3%*8)

(1) $(p \to q) \to ((r \to \neg p) \to (r \to \neg q))$是重言式. [x]

(2) 所有的自然数是整数不能在L中表达, 但能在K中较好地表达. [✓]

(3) Γ的一个正规模型不一定把≈解释为相等. [x]

(4) $f(a, x_2)$对$R_1^2(b, x_1) \to \forall x_1 R_2^2(x_1, x_2)$中的$x_2$是自由的. [✓]

(5) 递归函数是$K_N$可表示的. [✓]

(6) $\vdash p$的判定可以用真值表的方法. [x]

(7) $\Gamma \vDash p$, 则$p$的每个模型也是Γ的模型. [x]

(8)

2 简答题

(1) 本学期你学习数理逻辑的最大收获是什么?
最大的收获是让自己一定程度上克服了对直觉的依赖, 转而借助逻辑来考虑事情. 这种品质是十分重要的. 在数学发展的历史上, 就有很多克服直觉而获得的新创造, 甚至是推翻了原有不合理的理论. 比如哥德尔就能够在大家都在依照自己的直觉, 想要尝试去证明完备的大势之下, 毅然证明出了哥德尔不完备性定理.

(2) 直观地解释"模型"的含义. 模型相当于一个给定的问题的讨论域, 在这个讨论域下, 前提集的内容都是成立的, 那么也就能够以此为基础去进行推导, 进而得到其他命题的真伪.

(3) Godel不完全性定理证明的主要步骤?

$1^\circ$ 先构造一个公式$p(\overline{m})$, 其直观理解是"它从$K_N$不可证"

$2^\circ$ 证明$\vdash p(\overline{m})$和$\vdash \neg p(\overline{m})$都不成立

$3^\circ$ 从而得到不完备

3 $\vdash p \to \neg\neg p$的直接证明和简化证明.

- 直接证明:

双否律的直接证明

(1)$\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(2)$(\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p))$ $(L2)$

(3)$(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

(4)$\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(5)$\neg\neg p \to \neg\neg p$ $MP(3)(4)$

(6)$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(7)$(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L3)$

(8)$((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

(9)$\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $MP(7)(8)$

(10)$(\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L2)$

(11)$(\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $MP(9)(10)$

(12)$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(13)$\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $MP(11)(12)$

(14)$(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $(L3)$

(15)$((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L1)$

(16)$\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(14)(15)$

(17)$(\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L2)$

(18)$(\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(16)(17)$

(19)$\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)$ $MP(13)(18)$

(20)$(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)) \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $(L2)$

(21)$(\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $MP(19)(20)$

(22)$\neg\neg p \to p$ $MP(5)(21)$

- 简化证明:
  课本$P_{26}$

4 $\vdash \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \neg\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$是否正确?证明你的结论

设$M=\{N,\varnothing,\{\geq\}\}$, $I$把$x_2$指派成0, 那么$I(\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2))=t$, 但$I(\neg\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2))=f$,

从而$\nvDash \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \neg\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$

也就是$\nvdash \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \neg\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$

5 将公式$(\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \neg\exists x_2 R_1^1(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R_2^2(x_1,x_2)$化为前束合取范式

1. $(\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \neg\exists x_2 R_1^1(x_2)) \to \forall x_3 \forall x_4 R_2^2(x_3,x_4)$
2. $\forall x_3 \forall x_4((\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \neg\exists x_2 R_1^1(x_2)) \to R_2^2(x_3,x_4))$
3. $\forall x_3 \forall x_4((\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 \neg R_1^1(x_2)) \to R_2^2(x_3,x_4))$
4. $\forall x_3 \forall x_4((\exists x_1(R_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 \neg R_1^1(x_2)))) \to R_2^2(x_3,x_4))$
5. $\forall x_3 \forall x_4 \forall x_1((\forall x_5(R_1^2(x_1,x_2) \to \neg R_1^1(x_5))) \to R_2^2(x_3,x_4))$
6. $\forall x_3 \forall x_4 \forall x_1 \exists x_5((R_1^2(x_1,x_2) \to \neg R_1^1(x_5)) \to R_2^2(x_3,x_4))$
7. $\forall x_3 \forall x_4 \forall x_1 \exists x_5(\neg(\neg R_1^2(x_1,x_2) \vee \neg R_1^1(x_5)) \vee R_2^2(x_3,x_4))$
8. $\forall x_3 \forall x_4 \forall x_1 \exists x_5((R_1^2(x_1,x_2) \wedge R_1^1(x_5)) \vee R_2^2(x_3,x_4))$
9. $\forall x_3 \forall x_4 \forall x_1 \exists x_5(R_1^2(x_1,x_2) \vee R_2^2(x_3,x_4)) \wedge (R_1^1(x_5) \vee R_2^2(x_3,x_4)))$

6 $\Gamma$是公式集, 其中的公式都形如$p(a_1,a_2)$, 直观解释为$a_1$是$a_2$的父母, 谓词$A(a_1,a_2)$的直观解释为$a_1$是$a_2$的祖先, 且有

$$\Gamma \cup \{A(x_1,x_2) \leftrightarrow p(x_1,x_2)\} \vdash A(a_1,a_2)$$

试写出$p(x_1,x_2)$在一阶逻辑中的形式.

## 3 2017年春季期末

1 判断题$3 \times 10$分

2 简答题 14分

(1) $K_5$限制条件的意义. 举例说明.
抄思考题

(2) 哥德尔不完备性定理怎么构造不可证明命题$p(\overline{m})$的?
抄书

3 直接证明与简化证明

$$\{p \to (q \to r)\} \vdash (((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$$

这踏马是小测题.

- 直接证明

1) $p \to (q \to r)$ (已知)

2) $(((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r)) \to (((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$ (L2)

3) $(((q \to p) \to (q \to r)) \to (((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r))$ (L2)

4) $(q \to (p \to r)) \to ((q \to p) \to (q \to r))$ (L2)

5) $q \to (p \to q)$ (L1)

6) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)

7) $(p \to q) \to (p \to r)$ (MP 1, 6)

8) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)

9) $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (MP 7,8)

10) $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$ (L2)

11) $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (MP 9, 10)

12) $q \to (p \to r)$ (MP 5, 11)

13) $(q \to p) \to (q \to r)$ (MP 12, 4)

14) $((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r)$ (MP 13, 3)

15) $(((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$ (MP 14, 2)

- 简化证明:

  以下公式由$\{p \to (q \to r), ((q \to p) \to q) \to (q \to p), (q \to p) \to q\}$可证:

  1) $(q \to p) \to q$ (已知)
  2) $((q \to p) \to q) \to (q \to p)$ (已知)
  3) $q \to p$ (MP 1, 2)
  4) $q$ (MP 3, 1)
  5) $p$ (MP 4, 3)
  6) $p \to (q \to r)$ (已知)
  7) $q \to r$ (MP 5, 6)
  8) $r$ (MP 4, 7)

  故由演绎定理, 知$\{p \to (q \to r)\} \vdash (((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$

4 证明

$$\vdash \exists x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 R(x_1, x_2)$$

1) $R(x_1, x_2) \to \exists x_1 R(x_1, x_2)$ ($\exists_1$规则)
2) $\forall x_2((R(x_1, x_2) \to \exists x_1 R(x_1, x_2))$ (1, Gen)
3) $\forall x_2((R(x_1, x_2) \to \exists x_1 R(x_1, x_2)) \to (\forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 R(x_1, x_2))$ (练习15.2)
4) $\forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 R(x_1, x_2)$ (MP 2, 3)

由演绎定理:

$$\{\forall x_2 R(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_2 \exists x_1 R(x_1, x_2)$$

由$\exists_2$规则(Gen变元$x_2$不在$\forall x_2 R(x_1, x_2)$中自由出现, 且$x_1$不在$\forall x_2 \exists x_1 R(x_1, x_2)$中自由出现):

$$\{\exists x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_2 \exists x_1 R(x_1, x_2)$$

由演绎定理(Gen变元$x_2$不在$\exists x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$中自由出现):

$$\exists x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 R(x_1, x_2)$$

5 前束范式

$$\exists x_1 R(x_1, x_2) \vee (R'(x_2) \to \neg \forall x_1 \exists x_2 (x_2 \approx x_1))$$

1) $(\neg \exists x_1 R(x_1, x_2)) \to (R'(x_2) \to \exists x_4 \forall x_3 \neg (x_3 \approx x_4))$ ($\vee$,$\forall$和$\exists$的定义, 两个双否律)
2) $\forall x_1 \neg R(x_1, x_2) \to \exists x_4 \forall x_3 (R'(x_2) \to \neg (x_3 \approx x_4))$ (78页命题2的2°, $\exists$的定义, 两个双否律)

3) $\exists x_4 \forall x_3 (\forall x_1 \neg R(x_1, x_2) \to (R'(x_2) \to \neg(x_3 \approx x_4)))$ (78页命题2的2°)

4) $\exists x_4 \forall x_3 \exists x_1 (\neg R(x_1, x_2) \to (R'(x_2) \to \neg(x_3 \approx x_4)))$ (78页命题2的3°)

6 构造一个$K_p$偏序运算 ????????????????????????????????????????????????????????