SA22010077 周艺嘉

周艺嘉 SA22010077

一. 证明：①先证明运算的封闭性：对 $\forall A,B\in 2^S$ 显然有 $A+B\in 2^S$. $AB\in 2^S$ 即运算满足封闭性

② 证明 $(2^S,+)$ 为交换群

(i) 证明满足结合律：根据定义：$(A+B)+C=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)+C=\{[(A\backslash B)\cup(B\backslash A)]\backslash C\}\cup\{C\backslash[(A\backslash B)\cup(B\backslash A)]\}$

$A+(B+C)=A+(B\backslash C)\cup(C\backslash B)=\{A\backslash[(B\backslash C)\cup(C\backslash B)]\}\cup\{[(B\backslash C)\cup(C\backslash B)]\backslash A\}$

二者表示的区域均为 　$\therefore (A+B)+C=A+(B+C)$　满足结合律

(ii) 证明存在单位元　$\because \forall A\in 2^S$. 有 $\phi\in 2^S$. 使得：$A+\phi=(A\backslash\phi)\cup(\phi\backslash A)=A\cup\phi=A$

$\phi+A=(\phi\backslash A)\cup(A\backslash\phi)=\phi\cup A=A$　$\therefore$ 存在单位元 ϕ

(iii) 证明存在逆元　$\because \forall A\in 2^S$. 有 $A+A=(A\backslash A)\cup(A\backslash A)=\phi\cup\phi=\phi$　$\therefore$ 存在逆元 A

(iv) 证明可交换　$A+B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(B\backslash A)\cup(A\backslash B)=B+A$　综上. $(2^S,+)$ 是交换群

③ 证明 $(2^S,\cdot)$ 为半群

对 $\forall A,B\in 2^S$. 有：$(AB)C=(A\cap B)\cdot C=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$　$A(BC)=A(B\cap C)=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

$\therefore (AB)C=A(BC)$　满足交换律，$(2^S,\cdot)$ 是半群

④ 证明乘法对加法满足分配律

$(A+B)C=[(A\backslash B)\cap C]\cup[(B\backslash A)\cap C]=[(A\cap C)\backslash(B\cap C)]\cup[(B\cap C)\backslash(A\cap C)]=(A\cap C)+(B\cap C)=AC+BC$

$A(B+C)=A\cap[(B\backslash C)\cup(C\backslash B)]=[A\cap(B\backslash C)]\cup[A\cap(C\backslash B)]=[(A\cap B)\backslash(A\cap C)]\cup[(A\cap C)\backslash(A\cap B)]=AB+AC$

$\therefore$ 满足分配律　综上 $(2^S,+,\cdot)$ 作成环

⑤ 对 $\forall A\in 2^S$. 总存在 $S\in 2^S$. 使得：$A\cdot S=A\cap S=A=S\cap A=SA$　$\therefore S$ 为 $(2^S,\cdot)$ 的单位元

⑥ 对 $\forall A,B\in 2^S$. 有 $A\cdot B=A\cap B=B\cap A=BA$　$\therefore (2^S,\cdot)$ 满足交换律

$\therefore$ 综上. $(2^S,+,\cdot)$ 是一个有单位元的交换环

二. 证明：已知有线性空间上的映射 $\tau: V\to V'$ 是同态映射. 则有线性映射的核决定等价关系：$y\sim x\Leftrightarrow y-x\in Ker\tau$

等价类为 $\hat{x}=x+Ker\tau$　使所有等价类作成 $V/Ker\tau$.

由映射的标准分解知. $\tau=\hat{\tau}\circ\sigma$ 其中自然映射 σ. 由等价关系易知有 $\forall$ 等价类 $\hat{x}$ 总有元 x 与之对应. 自然映射 σ 是满射.

又有 $\sigma(x+y)=\widehat{x+y}=x+Ker\tau+y+Ker\tau=\hat{x}+\hat{y}=\sigma(x)+\sigma(y)$　$\sigma(\alpha x)=\widehat{\alpha x}=\alpha\hat{x}=\alpha\sigma(x)$　$\therefore \sigma$ 是满线性映射

诱导映射 $\hat{\tau}: x+Ker\tau\mapsto\tau(x)$，由映射标准分解的推导知 $\hat{\tau}$ 是 1-1 映射. 且保持加法运算(群同构).

又有 $\hat{\tau}(\alpha\hat{x})=\hat{\tau}(\widehat{\alpha x})=\tau(\alpha x)=\alpha\tau(x)=\alpha\hat{\tau}(\hat{x})$　$\therefore$ 诱导映射 $\hat{\tau}$ 是线性映射. 且为线性同构

$\therefore V/Ker\tau\simeq V'=Im\tau$

综上. 有通过 $V/Ker\tau$ 可作映射分解 $\tau=\hat{\tau}\circ\sigma$. 其中 自然映射 $\sigma: x\mapsto x+Ker\tau$ 是满线性映射　诱导映射 $\hat{\tau}: x+Ker\tau\mapsto\tau(x)$ 是单线性映射

[illegible]嘉 SA22010077

三. 1.解. 由题知 $W=\{(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3=0\}$

$\therefore$ W的基础解系为 $\alpha_1=[-1,1,0]^T$ $\alpha_2=[-1,0,1]^T$.

即W的基为 $\alpha_1=[-1,1,0]^T$ $\alpha_2=[-1,0,1]^T$

$\because W=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ $W^\perp$为 $W^\perp=\{x\in V: \langle w,x\rangle=0,\ \forall w\in W\}$

$\therefore$ 取 $W^\perp$的基础解系为 β_1, ~~β_2~~. 则有 $\langle\alpha_1,\beta_1\rangle=0$ $\langle\alpha_2,\beta_1\rangle=0$, 得 $\begin{cases}-y_1+y_3=0\\-y_1+y_2=0\end{cases}$ 取 $\beta_1=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=[1,1,1]^T$

$\therefore$ W的基为 $\alpha_1=[-1,1,0]^T$ $\alpha_2=[-1,0,1]^T$

$W^\perp$的基为 $\beta_1=[1,1,1]^T$

2.解: 对 $[1,1,1]^T\in R^{3\times1}$. 有正交向量 $r_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $r_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

则有施密特正交化后: $\eta_1=r_1$

$$\eta_2=r_2-\frac{\langle r_2,\eta_1\rangle}{\langle\eta_1,\eta_1\rangle}\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac12\\\frac12\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac32\\-\frac12\\1\end{bmatrix}$$

则有 $\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=0\}=\mathrm{span}\{\eta_1,\eta_2\}$ 取 $U=[\eta_1,\eta_2]$

则有正交投影矩阵 $P=UU^H=\begin{bmatrix}-1&-\frac32\\1&-\frac12\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\-\frac32&-\frac12&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{4}&-\frac14&-\frac32\\-\frac14&\frac54&-\frac12\\-\frac32&-\frac12&1\end{bmatrix}$

四: (1) A的特征矩阵为: $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-3&-1&1\\-1&\lambda-2&1\\-2&-1&\lambda\end{bmatrix}$

经观察 显然 行列式因子 $D_1=1$ $D_2=1$

$$D_3=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)+2+1+2(\lambda-2)-\lambda+(\lambda-3)=(\lambda^2-3\lambda+2)(\lambda-2)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$\therefore$ 不变因子为 $d_1=D_1=1$ $d_2=\frac{D_2}{D_1}=1$ $d_3=\frac{D_3}{D_2}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

初等因子为 $(\lambda-1)$、$(\lambda-2)^2$

(2) 由(1)知 初等因子 $(\lambda-1)$ 对应Jordan块 $J_1=[1]$

$(\lambda-2)^2$ 对应 $J_2=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$

$\therefore J=\begin{bmatrix}J_1&\\&J_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

(3) 由凯莱—哈密顿定理的推论知

$$e^{At}=\sum_{i=0}^{2}a_i(t)A^i=a_0(t)I+a_1(t)A+a_2(t)A^2$$

其中代入特征值求 $a_0(t)$、$a_1(t)$、$a_2(t)$. 有: $\begin{cases}e^t=a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)\\e^{2t}=a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)\\te^{2t}=a_1(t)+4a_2(t)\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}a_0(t)=2te^{2t}-3e^{2t}+4e^t\\a_1(t)=-3te^{2t}+4e^{2t}-4e^t\\a_2(t)=te^{2t}-e^{2t}+e^t\end{cases}$

$$\because A^2=\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&2&-1\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&2&-1\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&4&-4\\3&4&-3\\7&4&-3\end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At}=a_0I+a_1A+a_2A^2$$

$$=\begin{bmatrix}a_0+3a_1+8a_2&a_1+4a_2&-a_1-4a_2\\a_1+3a_2&a_0+2a_1+4a_2&-a_1-3a_2\\2a_1+7a_2&a_1+4a_2&a_0-3a_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}te^{2t}+e^{2t}&te^{2t}&-te^{2t}\\e^{2t}-e^t&e^{2t}-e^t&-e^{2t}+e^t\\te^{2t}+e^{2t}-e^t&e^{2t}&-te^{2t}+e^t\end{bmatrix}$$

五. (1) $|\lambda I-A| = \left|\begin{bmatrix} \lambda+0.2 & -0.1 & -0.3 \\ -0.25 & \lambda & -0.5 \\ -0.1 & 0.4 & \lambda-0.3 \end{bmatrix}\right| = \lambda(\lambda-0.3)(\lambda+0.2)-0.005-0.03-0.03\lambda+0.2(\lambda+0.2)-0.025(\lambda-0.3)$

显然有A的特征值 $|\lambda_i|<1$ 即 $\rho(A)<1$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$

(2). ∵由(1)知 A的谱半径 $\rho(A)<1$

又∵ 数值级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. 有 $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$ 收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$

$\therefore \rho(A)<R=1$ $\therefore \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 & -0.3 \\ -0.25 & 1 & -0.5 \\ -0.1 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}^{-1}$$

其中有 伴随矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.9 & -0.05 & 0.35 \\ 0.225 & 0.81 & 0.675 \\ 0 & -0.47 & 0.95 \end{bmatrix}$ $|(I-A)| = 0.84-0.035-0.003+0.24-0.0175 = 1.1005$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \begin{bmatrix} \frac{0.9}{1.1005} & \frac{-0.05}{1.1005} & \frac{0.35}{1.1005} \\ \frac{0.225}{1.1005} & \frac{0.81}{1.1005} & \frac{0.675}{1.1005} \\ 0 & \frac{-0.47}{1.1005} & \frac{0.95}{1.1005} \end{bmatrix}$$

六. (1) 由题 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 作行初等变换. 将化为行标准形:

$$A \xrightarrow{r_2-r_1} \cdots \xrightarrow{r_3-r_2} \cdots \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 取 $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 则有 $A=BC=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(2). 由于 $\operatorname{rank} A = 2$ (由(1)知)

$\operatorname{rank}(A \vdots b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2$ $\therefore \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \vdots b)$ 方程组相容.

极小范数解即为 $x = A_m^- b$.

其中 $A_m^- = C_R^{-1} B_L^{-1} = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$

其中 $(CC^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ $(B^TB)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$$\therefore A_m^- = \begin{bmatrix} \frac{17}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{13}{30} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{7}{30} & \frac{1}{30} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = A_m^- b = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 极小范数解为 $x=\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

七. 证明: 1. ∵ 由于 对于正交矩阵有 $A^TA = AA^T = I$

∴ $|A^TA| = |I| = 1$

又 ∵ 对于正交矩阵有 $|A^T| = |A|$

∴ 有 $|A| = |A^T| = \pm 1$

∵ $\det|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

∴ 正交矩阵A的特征值为 1 或 -1

2. 证明: 由于 A的 ∞范数 $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ 即行元素绝对值之和的最大值

又 ∵ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 每行元素之和为常数 a. 且 A非负. 即每个元素 $a_{ij} > 0$.

A可视为 $a \cdot B$ B为一个随机矩阵. B中各行元素之和为1

∵ 对于随机矩阵B. 有 $\rho(B) = 1$

∴ $\rho(A) = \rho(aB) = a \cdot \rho(B) = a$

又 ∵ A各行元素之和为 a

∴ $\|A\|_\infty = a$

∴ $\rho(A) = \|A\|_\infty$ 得证