学号：

一. 问答题:

1. 〖6分〗 什么是集合的等价类？什么是集合的划分？举例说明集合的等价类与划分之间的关系.
2. 〖6分〗 什么是群的同态？写出群同态基本定理, 并举例说明.
3. 〖6分〗 对于线性变换 $\sigma \in \mathcal{L}(V)$, 写出子空间 $W \subset V$ 的最小多项式的构造方法.

二. 计算题:

1. 〖8分〗 写出三维欧式空间中任一向量向平面 $a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 = 1$ 作正交投影的投影矩阵, 其中 a_1, a_2, a_3 是常数.
2. 〖8分〗 令 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 求 e^A, e^{At}.

   $|\lambda I - A| = (\lambda-1)^3$
3. 〖8分〗 求矩阵 $A \otimes B$ 的特征值, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1/2 \end{bmatrix}$.
4. 〖8分〗 令 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & -0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$. 求 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

   $(\lambda-0.5)(\lambda-0.5)+0.25\times$

   $\lambda^2-\lambda+0.37$
5. 〖10分〗 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (1) 求 $\max\limits_{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^3} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$, $p = 1, 2, \infty$, 其中 $\|\cdot\|_p$ 表示向量的 p-范数.

   (2) 求最小二乘问题 $\min_{x\in\mathbb{C}^3} \|Ax - b\|_2$ 的最小模解. $x = A^+b$

三. 证明题:

A行满秩

1. 〖8分〗 对于线性系统 (A, B, C), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, 它的可控子空间是循环子空间 $\langle A \mid \mathcal{R}(B)\rangle$, 其中 $\mathcal{R}(\cdot)$ 表示列空间. 证明可控子空间是反馈不变的, 即

$$\langle A \mid \mathcal{R}(B)\rangle = \langle A + BF \mid \mathcal{R}(B)\rangle, \quad \forall F \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

2. 〖8分〗 令 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $H_i = |a_{ii}| - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0, i = 1, \cdots, n$. 试证: $|\det A| \geq H_1 \cdot H_2 \cdots H_n > 0$.
3. 〖8分〗 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, P 与 Q 分别为 m 阶和 n 阶酉矩阵. 试证: $(PAQ)^+ = Q^+A^+P^+$.
4. 〖8分〗 给定矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 试证明对任意 $\delta > 0$, 均存在正数 $k_\delta > 0$ 使得矩阵指数有如下范数估计

$$\|e^{At}\|_2 \leq k_\delta e^{(\lambda+\delta)t}, \quad \forall t > 0$$

其中 $\lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n} \mathrm{Re}\{\lambda_i\}$, $\mathrm{Re}\{\lambda_i\}$ 表示矩阵 A 特征值 λ_i 的实部.

5. 〖8分〗 证明 $\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \cdot \|B\|_F$, 其中 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数.

2015年 1月15日.

一. 简答题:

1. 设集合A中有了等价关系"~", 我们可以把相互等价的元素各自归类, 称所有与某元$a\in A$等价的元素构成的子集: $\hat{a}=\{x\in A; x\sim a\}$为以a作为代表的(包含元a)等价类.

如果一个集合A可以写为一些彼此不相交的子集$A_1, A_2, \cdots, A_n$的并集, 即
$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n, \quad A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j,\ 1\le i, j\le n)$$
则称这些子集构成集A的一个划分

关系: 有了集合的等价关系, 就有了集合的划分, 反之亦然.
$$A=\bigcup_{a\in A}\hat{a}\ ;\ A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Rightarrow\{A_i: i=1,2,\cdots,n\}$$ P(11)

2. 群的同态: 有两个群$(G_1, *)$ $(G_2, \circ)$, 有映射$\varphi: G_1\longrightarrow G_2$满足
$$\varphi(a_1*a_2)=\varphi(a_1)\circ\varphi(a_2)\ ;\ a_1, a_2\in(G_1, *)$$
则称φ为群G_1到G_2的同态. 且有e, e'分别为G, G'的单位元,
$$\varphi(e)=e' \quad \varphi(a^{-1})=(\varphi(a))^{-1};\ \forall a\in G.$$
同态基本定理: 设$\varphi: S\rightarrow S'$是群的同态, 则有群同构.
$$S/\ker\varphi\simeq \mathrm{Im}\,\varphi$$
例子: ~~G的不变子群H, $\ker\varphi=H$~~,

由G到G/H的自然同态: $\sigma: a\longrightarrow aH$
$$\ker\sigma=\{x\in G\mid\sigma(x)=H\}=H$$
由此: H是商群G/H的单位元, 群的同态与不变子群一一对应. P42.

3. 对一个向量$v\in V$作$n+1$个向量$v, \sigma v, \cdots, \sigma^n v$, 从左至右的最大线性无关组记为$v, \sigma v, \cdots, \sigma^{k-1}v$, $k\le n$.

于是$\sigma^k v$可以用以上的向量组线性表示.
$$\sigma^k v=-\sum_{i=0}^{k-1}a_i\sigma^i v,\quad a_0, \cdots, a_{k-1}\in F.$$
记$\phi(\lambda)=\lambda^k+\sum_{i=0}^{k-1}a_i\lambda^i$

则: $\phi(\sigma)v=0$, $\phi(\lambda)$为σ在V的化零多项式, 另一方面. 由最大线性无关向量组的作法, 不可能再有次数低于k的化零多项式, $\phi(\lambda)$首一, 故$\phi(\lambda)$是σ在V的最小多项式.

二，计算题：

1. 由题：取与 $[a_1\ -a_2\ -a_3]^T$ 正交的两个列向量 $[a_3\ 0\ a_1]^T$ $[a_2\ a_1\ 0]^T$.

史密特正交化可得：$u_1 = [e_{21}\ e_{22}\ e_{23}]^T$ $u_2 = [e_{31},\ e_{32}\ e_{33}]^T$.

则：$\{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 = 1\} = span\left\{\begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{33} \end{pmatrix}\right\}$.

$$P = \begin{pmatrix} e_{21} & e_{31} \\ e_{22} & e_{32} \\ e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{21} & e_{31} \\ e_{22} & e_{32} \\ e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}^H.$$

(习题集 P5)

2. 由题：$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 特征多项式：$f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$

(矩阵函数待定系数法 (P175))

即：$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

可得：$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$.

$$e^A = \varphi(A) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} e = a_0 + a_1 + a_2 \\ e = a_1 + 2a_2 \\ e = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{e}{2} \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{e}{2} \end{cases}$$

则：$e^A = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2$ $\quad A^2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 12 \\ -2 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

$$e^A = \begin{bmatrix} \frac{e}{2} & & \\ & \frac{e}{2} & \\ & & \frac{e}{2} \end{bmatrix} + \frac{e}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 & 12 \\ -2 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e & -2e & 6e \\ -e & 0 & 3e \\ -e & -e & 4e \end{bmatrix}.$$

$$e^{At} \Rightarrow \begin{cases} e^t = a_0 + a_1 + a_2 \\ te^t = a_1 + 2a_2 \\ t^2e^t = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = e^t - te^t - \frac{3}{2}t^2e^t \\ a_1 = te^t - t^2e^t \\ a_2 = \frac{t^2}{2}e^t \end{cases}$$

$$e^{At} = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 = \begin{bmatrix} e^t - te^t - \frac{3}{2}t^2e^t & & \\ & e^t - te^t - \frac{3}{2}t^2e^t & \\ & & e^t - te^t - \frac{3}{2}t^2e^t \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -t^2e^t - te^t & -2(t^2e^t + te^t) & 6(t^2e^t - te^t) \\ -t^2e^t - te^t & 0 & 3(t^2e^t - te^t) \\ -t^2e^t - te^t & -t^2e^t - te^t & 4(t^2e^t - te^t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t^2e^t & -2t^2e^t & 6t^2e^t \\ -t^2e^t & -\frac{t^2}{2}e^t & 3t^2e^t \\ -t^2e^t & -t^2e^t & \frac{7}{2}t^2e^t \end{bmatrix}.$$

3. $f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)$ ⇒ $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$.（P207，定理7.4.3）

$f_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ -2 & -3 & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=[(\lambda-2)(\lambda-1)+1](\lambda-1)=(\lambda^2-3\lambda+3)(\lambda-\frac{1}{2})$

得：$\mu_1=\frac{1}{2}$，$\mu_2=\frac{3+\sqrt{3}j}{2}$，$\mu_3=\frac{3-\sqrt{3}j}{2}$

则，$A\otimes B$ 的特征值为：

$\xi=\lambda\mu \Rightarrow \frac{3}{2},\ \frac{9+3\sqrt{3}j}{2},\ \frac{9-3\sqrt{3}j}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{-3-\sqrt{3}j}{2},\ \frac{-3+\sqrt{3}j}{2}$.

4. 由题可知：（P157，定理6.3.6.）

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-0.8 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-0.5 & -0.5\\ -2 & 0.25 & \lambda-0.5\end{vmatrix}=(\lambda-0.8)[(\lambda-0.5)^2+0.5\times0.25]=(\lambda-0.8)(\lambda^2-\lambda+0.375)$

$\Rightarrow \lambda_1=0.8$　$\lambda_2=\frac{1\pm\sqrt{-0.5}}{2}$　　$\rho(A)=0.8<1$；则 $\exists\,\varepsilon$ $\|A\|_\alpha$ 使 $\|A\|_\alpha\leq\rho(A)+\varepsilon<1$

即：$A^k\to0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$.

5. 解：(1). 当 $p\geq1$ 时，取 $x=(0,0,1)^T$.（P150，诱导的矩阵范数）.

则：$\max\limits_{x\neq0,x\in C^3}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}=\|Ax\|_1=\|[0,-1]\|_1=1$

当 $p=2$ 时，取 $x=(0,0,1)^T$.

则：$\max\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\|Ax\|_2=\|(0,-1)\|_2=\|[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}]\|_2=1$.

$p=\infty$ 时：取 $x=(0,0,1)^T$.

$\max\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\|Ax\|_\infty=\|(0,-1)\|_\infty=1$.

(2). $\min_{x\in C^3}\|Ax-b\|_2$ 的极小范数解为 $x=A^+b$.

① 求解 A^+

则 A 为行满秩矩阵，则：$A=IA=BC$. 其中 $B=I$，$C=A$.

$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$.

$=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

$=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

$x=A^+b=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

三. 证明:

1.

4.

②: 证明: 由圆盘定理:

$|\lambda_i - a_{ii}| \le \sum_{j\ne i}|a_{ij}| \Rightarrow |\lambda| > |a_{ii}| - \sum_{j\ne i}|a_{ij}| = H_i$.

$\det|A| = \prod_{i=1}^{n}|\lambda_i| \ge H_1 \cdot H_2 \cdots H_n > 0$.

3. 证明: 设 $A = BC$ 是矩阵A的一种满秩分解. (矩阵分析 等 P140)

则: $PAQ = PABCQ$.

$(PAQ)^+ = (PBCQ)^+ = (CQ)^H[CQ(CQ)^H]^{-1}[(PB)^H PB]^{-1}(PB)^H$

$= Q^H C^H [CQQ^H C^H]^{-1}[B^H P^H PB]^{-1} B^H P^H$

$= Q^{-1} C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H P^{-1}$

$= Q^+ A^+ P^+$.

5. 证明 由 $tr(A\otimes B) = tr(A)\cdot tr(B)$ 可知: (矩阵分析 P261.)

$\|A\otimes B\|_F = \{tr[(A\otimes B)^H (A\otimes B)]\}^{\frac{1}{2}}$

$= [tr[A^H \otimes B^H](A\otimes B)]^{\frac{1}{2}}$

$= \{tr[(A^H A)\otimes(B^H B)]\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{tr(A^H A)\cdot tr(B^H B)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{tr(A^H A)\}^{\frac{1}{2}}\cdot\{tr(B^H B)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \|A\|_F \cdot \|B\|_F$.