中国科学技术大学研究生考试试卷

考试科目：矩阵代数　　　　　　　　　　　　　　　考试日期：2016 年 1 月 10 日

学生所在系：__________　姓名：__________　学号：__________

一. 〖54分〗 解答下述问题:

1. 群的一个有限子集成为子群的充要条件是群运算对该子集封闭, 试证之.
2. 域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换空间 $\mathcal{L}(V)$ 作为环与 n 阶矩阵环 $F^{n\times n}$ 同构, 试证之.
3. 多项式 $a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda)\in P[\lambda]$ 的所有公倍式集合是多项式环 $P[\lambda]$ 的理想, 其生成元为最小公倍式 $l.c.m\{a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda)\}$, 试证之.
4. 写出环同态基本定理, 并举例说明.
5. 设 S,T 均是线性空间 V 的子空间, 则有 $S+T=S\cup T \iff S\subset T$ 或 $S\supset T$.
6. 线性变换 σ 对向量 v 生成的循环子空间 $\langle\sigma\,|\,v\rangle$ 是包含 v 的最小 σ 不变子空间, 试证之.
7. 若 A 是正规矩阵, 则有 $\rho(A)=\|A\|_2$.
8. 若 A,B 均为方阵, 则有 $\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}(A)\cdot\operatorname{tr}(B)$.
9. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 且 P,Q 分别为 m 阶和 n 阶酉矩阵, 试证 $(PAQ)^+=Q^+A^+P^+$.

二. 〖16分〗 对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

1. 求 $\rho(A)$, $\|A\|_2$, $\|A\|_1$, 以及 $\|A\|_\infty$;
2. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$ 是否收敛？若收敛, 求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$;
3. 求 e^A, 以及 e^{At}.

三. 〖10分〗 已知矩阵及向量

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$

1. 判断矩阵方程 $Ax=b$ 是否有解？
2. 求解最小二乘问题 $\min_{x\in\mathbb{C}^3}\|Ax-b\|_2$ 的最小模解.

四. 〖10分〗 令矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

1. 求矩阵 $C=A\otimes B$ 的特征值;
2. 判断系统 $\dot{x}=Cx$ 的稳定性并简述理由.

五. 〖10分〗 设矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\|A\|$ 是矩阵的诱导范数, 且 $\det A\neq 0$, 试证：

1. $\|A^{-1}\|\geq\|A\|^{-1}$;
2. $\|A^{-1}\|^{-1}=\min\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, 其中 $x\in\mathbb{C}^n$.