中国科学技术大学研究生考试试卷

考试科目：矩阵代数　　　　考试日期：2023 年 1 月 6 日

学生所在系：__________ 姓名：__________ 学号：__________

一. 〚15分〛证明：由集合 S 的所有子集作成的集合 2^S (幂集), 关于运算

$$
\begin{aligned}
A + B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
AB &= A \cap B
\end{aligned}
$$

构成一个有单位元的交换环.

二. 〚15分〛证明：线性空间上的线性映射 $\tau \in \mathcal{L}(V, V')$, 通过商空间 $V/\mathrm{Ker}\tau$ 可作映射分解

$$\tau = \hat{\tau} \circ \sigma$$

$$
\begin{tikzcd}
 & V/\mathrm{Ker}\tau \arrow[dr, "\hat{\tau}"] & \\
V \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\tau=\hat{\tau}\circ\sigma"] & & V'
\end{tikzcd}
$$

其中自然映射 $\sigma : x \mapsto x + \mathrm{Ker}\tau$ 是满线性映射, 诱导映射 $\hat{\tau} : x + \mathrm{Ker}\tau \mapsto \tau(x)$ 是单线性映射.

三. 〚15分〛考查三维欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 的子空间

$$W = \{\, (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,\}$$

及其正交补空间 $W^{\perp}$.

1. 求子空间 W 和 $W^{\perp}$ 的基.
2. 求从 $\mathbb{R}^3$ 到 W 的正交投影算子对应的投影矩阵.

四. 〚20分〛设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. 〚9分〛求 A 的行列式因子、不变因子和初等因子.
2. 〚5分〛求 A 的 Jordan 标准形.
3. 〚6分〛求 e^{At}.

五. 〚10分〛设 $A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$

1. 〚5分〛证明矩阵序列 $\{A^k\}$ 收敛，并求 $k \to \infty$ 时的极限.
2. 〚5分〛证明矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛，并求其无穷和。

六. 〖15分〗 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1. 〖7分〗 求 A 的一个非平凡最大秩分解.
2. 〖8分〗 判断方程组 $AX = b$ 是否相容, 并求其极小范数解.

七. 〖10分〗 证明:

1. 〖5分〗 正交矩阵 A 的特征值为 +1 或者-1.
2. 〖5分〗 设非负矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的每一行元素之和为常数 a, 证明 A 的谱半径

$$\rho(A) = \|A\|_{\infty}.$$