中国科学技术大学研究生考试试卷

考试科目：矩阵代数　　　　　　　　　　　　考试日期：2016 年 1 月 10 日

学生所在系：____________　姓名：____________　学号：____________

一. 〖54分〗 解答下述问题:

1. 群的一个有限子集成为子群的充要条件是群运算对该子集封闭, 试证之. (习题2.2, (1)).
2. 域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换空间 $\mathcal{L}(V)$ 作为环与 n 阶矩阵环 $F^{n\times n}$ 同构, 试证之. (习题2.1 (7)).
3. 多项式 $a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda)\in P[\lambda]$ 的所有公倍式集合是多项式环 $P[\lambda]$ 的理想, 其生成元为最小公倍式 $l.c.m\{a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda)\}$, 试证之. (习题2.3 (3))
4. 写出环同态基本定理, 并举例说明. (P42)
5. 设 S,T 均是线性空间 V 的子空间, 则有 $S+T=S\cup T \iff S\subset T$ 或 $S\supset T$. (习题3.1, (1)).
6. 线性变换 σ 对向量 v 生成的循环子空间 $\langle\sigma\,|\,v\rangle$ 是包含 v 的最小 σ 不变子空间, 试证之. ✓
7. 若 A 是正规矩阵, 则有 $\rho(A)=\|A\|_2$. (习题6.1 (9)).
8. 若 A,B 均为方阵, 则有 $\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}(A)\cdot\operatorname{tr}(B)$. (参考解析 P261).
9. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 且 P,Q 分别为 m 阶和 n 阶酉矩阵, 试证 $(PAQ)^+=Q^+A^+P^+$. (参考矩阵分析 生史例8.7)

(重点) 考. 二. 〖16分〗 对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

1. 求 $\rho(A)$, $\|A\|_2$, $\|A\|_1$, 以及 $\|A\|_\infty$;
2. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$ 是否收敛? 若收敛, 求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$; (参考笔记)
3. 求 e^A, 以及 e^{At}.

考. 三. 〖10分〗 已知矩阵及向量

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$

1. 判断矩阵方程 $Ax=b$ 是否有解?
2. 求解最小二乘问题 $\min_{x\in\mathbb{C}^3}\|Ax-b\|_2$ 的最小模解.

四. 〖10分〗 令矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}$$

1. 求矩阵 $C=A\otimes B$ 的特征值;
2. 判断系统 $\dot{x}=Cx$ 的稳定性并简述理由. P(182).

五. 〖10分〗 设矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\|A\|$ 是矩阵的诱导范数, 且 $\det A\neq 0$, 试证: (参考矩阵分析 P203)

1. $\|A^{-1}\|\geq\|A\|^{-1}$;
2. $\|A^{-1}\|^{-1}=\min\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, 其中 $x\in\mathbb{C}^n$.

2016年

1. 证明:

①"⇒" 当群的有限子集成为子群时，显然有群运算对该子集封闭

②"⇐" 不妨设群为G，有限子集A，$A\subset G$，$card(A)=n<+\infty$.

∵ A对群G的运算封闭.

∴ 对 $\forall a_1, a_2 \in A$；$a_1 \cdot a_2 \in A$ 选不为单位元的 a_2 继续运算，则

则: $a_1 \cdot a_2 a_2$，$a_1 a_2 a_2 a_2 \in A$，记 $a_1 \cdot \underbrace{a_2 \cdots a_2}_{k} = a_1 \cdot a_2^k$ $k\in N$

有 $k>n-2$ 时，$a_1, a_2, a_1a_2, \cdots a_1a_2^k$ 有多于n个元素，从而必有重复元，

设 $a_1a_2^m = a_1a_2^{m+p}$，$m,p\in N$；p为使等式成立的最小整数

∵ $a_1a_2^{m+p} - a_1a_2^m = a_1a_2^m(a_2^p - 1)$

∴ $a_2^p = 1$. $a_1 = e$.

即: $A = \{1, a_2, \cdots a_2^{n-1}\}$

对 $\forall a_2^k \in A$ 有 $a_2^{n-k} \in A$ 使 $a_2^k \cdot a_2^{n-k} = a_2^{n-k} a_2^k = 1$

从而 A为群G的子群.

综上此题得证.

2. 证明:

设n维线性空间V中的基 $\varepsilon = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 任取 $\sigma \in L(V)$ 设在 σ

线性变换下 ε 变为 $\varepsilon' = \{e_1', \cdots, e_n'\}$，从而 $\sigma(e_j) = \sum a_{ij} e_i'$，表示成矩阵形式有

$$[\sigma(e_1), \cdots \sigma(e_n)] = [e_1', \cdots, e_n'] \begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix}$$

令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$；则 $A \in F^{n\times n}$ 并且对于确定的 σ，有唯一的A与之对应.

同样对于给定的A，也有唯一的 $\sigma \in L(V)$ 与之对应，原命题得证.

3. 证明:

设 $a_1(\lambda), \cdots, a_n(\lambda)$ 的所有最小公倍式集合为 $R = \{r(\lambda) \mid a_i(\lambda) \mid r(\lambda), i=1,2\cdots n\}$

$r_0(\lambda) = lcm(a_1(\lambda), \cdots, a_n(\lambda))$ 显然R非空

对 $\forall r_1(\lambda), r_2(\lambda) \in R$ 有 $r_1(\lambda) = U_i(\lambda) a_i(\lambda)$，$r_2(\lambda) = V_i(\lambda) a_i(\lambda)$

其中 $i=1,2,\cdots,n$，$U_i(\lambda), V_i(\lambda) \in P[\lambda]$ $U_i(\lambda) - V_i(\lambda) \in P[\lambda]$

∵ $r_1(\lambda) - r_2(\lambda) = [U_i(\lambda) - V_i(\lambda)] r_i(\lambda)$

∴ $a_i(\lambda) \mid [r_1(\lambda) - r_2(\lambda)]$，$i=1,2,\cdots,n$

∴ $r_1(\lambda) - r_2(\lambda) \in R$

对 $\forall P(\lambda)\in P[\lambda]$ 显然有

$a_i(\lambda)\mid r_1(\lambda)P(\lambda)$　$a_i(\lambda)\mid P(\lambda)r_1(\lambda)$，$i=1,2,\cdots n$

即：$r_1(\lambda)P(\lambda)\in R$，$P(\lambda)r_1(\lambda)\in R$

从而 R 为 $P[\lambda]$ 的理想

③ 由 $r_0(\lambda)$ 的定义知 对 $\forall r_i(\lambda)\in R$ 有 $r_0(\lambda)\mid r_i(\lambda)$ 从而

$R=\{u(\lambda)r_0(\lambda),\ u(\lambda)\in P[\lambda]\}=(r_0(\lambda))$

即：理想 R 的生成元是最小公倍式 $r_0(\lambda)$

14). 同态基本定理：设 $\varphi:S\to S'$ 是环的同态，则有环同构 $S/\ker\varphi\simeq \operatorname{Im}\varphi$

举例：R 上的函数 $f(x)=x$：$f:R\to R$，显然 f 为同态映射，则

$R/\ker f=\{\bar{x}: x\in R\}$，其中 $\bar{x}=\{x\}$，$\operatorname{Im}f=R$，故一定存在一一

映射使 $R/\ker f\to \operatorname{Im}f$，$R/\ker f\simeq \operatorname{Im}f$。

15). 证明：

$\Rightarrow$ 对 $\forall s\in S$，$\forall t\in T$，$\exists x\in S+T$，使 $x=s+t$

$\because S+T=S\cup T$ $\therefore x\in S\cup T$ 即：$x\in S$ 或 $x\in T$

当 $x\in S$ 时，有 $t=x+(-s)=x-s\in S$

$\because t$ 具有任意性，$\therefore T\subset S$

当 $x\in T$ 时 有 $s=x+(-t)=x-t\in T$

$\because s$ 具有任意性，$\therefore S\subset T$

$\Leftarrow$ $\because T,S$ 为 V 的子空间 $\therefore T,S$ 对加法运算封闭

当 $S\subset T$ 时 有 $S\cup T=T=S+T$；当 $T\subset S$ 时有 $S\cup T=S=S+T$

综上：原命题得证

16). 证明：设 σ 在向量 v 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$，且 $\deg[\varphi(\lambda)]=m$

则 $v,\sigma v,\cdots,\sigma^{m-1}v$ 线性无关 $\langle\sigma|v\rangle=\operatorname{span}\{v,\sigma v,\cdots\sigma^{m-1}v\}$

若 W 为包含 v 的不变子空间，则 $v,\sigma v,\cdots,\sigma^{m-1}v\in W$

从而 $\langle\sigma|v\rangle\subset W$，于是不变子空间 $\langle\sigma|v\rangle$ 具有最小性

对 $\forall x\in\langle\sigma|v\rangle$ 有 $x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sigma^{i-1}v$，$\alpha_i\in F$，$i=1,2,\cdots m$

$\sigma(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sigma^{i}v$

考虑 $m+1$ 个向量 $v,\sigma v,\cdots,\sigma^{m}v$ 在 m 维空间必有线性相关

$\sigma^m v=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\sigma^{i-1}v$　$\beta_i\in F$，$i=1,2,\cdots,m$

于是 $\sigma(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sigma^i v=\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i\sigma^i v+\sum_{i=1}^{m}\alpha_m\beta_i\sigma^{i-1}v$

$=\alpha_m\beta_1+(\alpha_1+\alpha_m\beta_2)\sigma v+\cdots+(\alpha_{m-1}+\alpha_m\beta_m)\sigma^{m-1}v\in\langle\sigma|v\rangle$

即：$\langle\sigma|v\rangle$ 对 σ 具有不变性

7. 设A的特征值为 $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

则ヨ酉矩阵 $U \in C^{m\times n}$, $V \in C^{n\times n}$ 使

$$A = U\,diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} V^H$$

于是 $A^H A = (U\Sigma V^H)^H (U\Sigma V^H) = V\Sigma^2 V^H$

$$AA^H = (U\Sigma V^H)(U\Sigma V^H)^H = U\Sigma^2 U^H$$

从而 $\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| = |\lambda_1|$

$$\rho(AA^H) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|^2 = |\lambda_1|^2$$

$$\rho(A^H A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|^2 = |\lambda_1|^2$$

$\because \|A\|_2 = \sigma_1 = |\lambda_1|$

$\therefore \|A\|_2 = \rho(A) = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sqrt{\rho(AA^H)}$；说明这与A是否为正规矩阵无关

8. 证明：

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

所以 $tr(A\otimes B) = a_{11}trB + a_{22}trB + \cdots + a_{mm}trB$

$$= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm})\,trB$$

$$= tr(A)\cdot tr(B)$$

9. 证明：

$\because$ ~~$(PAQ)(Q^+A^+P^+)(PAQ) = PAQ\,Q^+A^+P^+\,PAQ = PAA^+AQ = PAQ$~~

~~$(Q^+A^+P^+)(PAQ)(Q^+A^+P^+) = Q^+A^+P^+PAQ\,Q^+A^+P^+ = Q^+A^+AA^+P = Q^+A^+P^+$~~ ①

~~$[(PAQ)(Q^+A^+P^+)]^H = [PAQ\,Q^+A^+P^+]^H = I_m^H = I_m = (PAQ)(P^+A^+Q^+)$~~

设 $A = BC$ 是矩阵A的一种满秩分解，那么 $PAQ = PBCQ$

$$(PAQ)^+ = (PBCQ)^+ = (CQ)^H[CQ(CQ)^H]^{-1}[(PB)^H PB]^{-1}(PB)^H$$

$$= Q^H C^H [CQQ^H C^H]^{-1} [B^H P^H PB]^{-1} (PB)^H$$

$$= Q^{-1} \underline{C^H (CC^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H} P^{-1}$$

$$= Q^{-1} A^+ P^{-1}$$

$$= Q^+ A^+ P^+$$

二、解：

1. $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda-\frac{1}{6})(\lambda-\frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{6}\ \lambda_2=\frac{1}{2}\ \lambda_3=\frac{1}{2}$

$\|A\|_2 = \rho(A) = \frac{1}{2} \quad \|A\|_1 = \frac{3}{2} \quad \|A\|_\infty = \frac{3}{2}$

2. ① 由题：$\sum_{k=1}^{\infty} k\cancel{x}^{k-1}$ 的收敛半径为1

$\rho(A) = \frac{1}{2} < 1$ 所以 $\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1}$ 绝对收敛

扣得：幂级数的求和.

② 解：

令 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$ $\cancel{k\to\infty\ f(x)} = \frac{1}{1-x}\ (|x|<1)$

则：$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$

$k\to\infty$ 时 $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

即：$\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1} = \frac{1}{(I-A)^2} = [(I-A)^2]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{36}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -16 & 4 \end{bmatrix}$

3. 由 $e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$ 得：

$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & s-\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\frac{1}{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\frac{1}{2}} & \frac{-1}{s-\frac{1}{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

$L^{-1}[(sI-A)^{-1}] = L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s-\frac{1}{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\frac{1}{2}} & \frac{-1}{(s-\frac{1}{2})^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{6}t} & & \\ & e^{\frac{1}{2}t} & -te^{\frac{1}{2}t} \\ & & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$

即：$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{6}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} & -te^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$

当 $t=1$ 时：

$e^{A} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{6}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}} & -e^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

三、解:

1. 已知 rank(A)=2 A的增广矩阵 $\tilde{A}=[A\ b]$，rank($\tilde{A}$)=3

∵ rank A < rank($\tilde{A}$) ∴方程无解

2. 解:

$$A^HA=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\-1&1&-1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&1\\-2&3&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-5)=0$$

得 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$ $\Rightarrow$ $\sigma_1=\sqrt5$　$\sigma_2=\sqrt3$，$\sigma_3=0$

当 $\lambda_1=5$ 时:
$$\begin{cases}[5I-A^HA]V_1=0\\ [3I-A^HA]V_2=0\\ A^HAV_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_1=[\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0]^T\\ V_2=[\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}]^T\\ V_3=[\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}]^T\end{cases}$$

$$\Rightarrow V=[V_1\ V_2\ V_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$$

求U值: $$[y_1,y_2]=A\left[\frac{V_1}{\sqrt{\lambda_1}}\ \frac{V_2}{\sqrt{\lambda_2}}\right]=A\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{18}}\\-\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{18}}\\0&\frac{2}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{10}}&0\\-\frac{2}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{18}}\\\frac{2}{\sqrt{10}}&0\\\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$$

取 $y_3=(a,b,c,d)$；$\begin{cases}\langle y_1,y_3\rangle=0\\\langle y_2,y_3\rangle=0\end{cases}\Rightarrow y_3=(-1,-1,0,1)$ 单位化 $\Rightarrow y_3=(-\frac{1}{\sqrt3}\ -\frac{1}{\sqrt3}\ 0\ \frac{1}{\sqrt3})$

即 $$U=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{10}}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{2}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{18}}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt{10}}&0&0\\\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{18}}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$$

$$A^+=V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}U^H$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt3}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{2}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{10}}\\0&\frac{3}{\sqrt{18}}&0&\frac{3}{\sqrt{18}}\\-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{15}&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}\\-\frac{1}{5}&\frac{4}{15}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{15}\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

最小范数解:

$$x=A^+b=[\quad]\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}\\6\end{bmatrix}$$

四.

(1): $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=2$

$B=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}$ $|\mu I-B|=\begin{vmatrix}\mu+2&-1\\-1&\mu+2\end{vmatrix}=(\mu+2)^2-1=(\mu+1)(\mu+3)=0 \Rightarrow \mu_1=-1,\ \mu_2=-3$

则: $C=A\otimes B$ 的特征值为

$\gamma_1=\lambda_1\mu_1=0$ $\gamma_2=\lambda_1\mu_2=0$

$\gamma_3=\lambda_2\mu_1=-2$ $\gamma_4=\lambda_2\mu_2=-6$

(2): 由题系统 $\dot{x}=Cx$ 的 ~~特征值~~ 的

非零特征值均小于0，且0特征值的初等因子为二次的；所以系统不稳定

五、证明:

1. $AA^{-1}=E$ $\|AA^{-1}\|=\|E\|=1$

由矩阵范数相容性

$1=\|AA^{-1}\|\le\|A\|\,\|A^{-1}\|$ $\Rightarrow$ $\|A\|^{-1}=\frac{1}{\|A\|}\le\|A^{-1}\|$

2、~~证明~~ 由定义可得

$$\|A^{-1}\|=\max_{x\neq0}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}$$

作变量替换，令 $y=A^{-1}x$

$$\|A^{-1}\|=\max_{x\neq0}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}=\max_{y\neq0}\frac{\|y\|}{\|Ay\|}=\frac{1}{\min\limits_{y\neq0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}}=\frac{1}{\min\limits_{x\neq0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|^{-1}=\min_{x\neq0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$