一、解答下述问题，并给出相应的证明　　2014.

1. 在$Z^2=Z\times Z$上（Z是整数环）定义加法与乘法 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$，$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$，那么$(Z^2,+,\cdot)$也作成环，现命$f:(a,b)\mapsto a$
证明f是环Z^2到环Z的一个同态映射，并求同态核$\ker f$.（P43. 4）习题2.3）

2. 域F上n维空间V上的线性变换空间$L(V)$作为环与n阶矩阵环$F^{n\times n}$同构；证
（习题3.1, (7)）

3. 设有线性变换$\sigma\in L(V)$，证明若$V=\langle\sigma^2|X\rangle$；则$V=\langle\sigma|X\rangle$；其中$X\in V$
举例说明逆命题不成立　　习题4.1 (1)

4. 设线性空间V上有两组基ε,ε'，并且由ε到ε'的过渡矩阵为$T_{\varepsilon\varepsilon'}$，证明向量$X\in V$在这两组基$\varepsilon,\varepsilon'$下有坐标变换$[X]_{\varepsilon'}=T^{-1}_{\varepsilon\varepsilon'}[X]_{\varepsilon}$（习题3.1.(8)）

5. 若有空间直和分解$V=W_1\oplus W_2$；证明有唯一幂等算子$\pi\in L(V)$，使得
$\mathrm{Im}\,\pi=W_1$，$\ker\pi=W_2$（习题4.1.(5)）

二、给定方阵$A=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\0&-2&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，请解答下列问题：　　第五章（标准型）.

1. 求特征矩阵$\lambda I-A$在复数域上的初等因子和Smith标准型形.
2. 求A的Jordan标准形和最小多项式
3. 求线性微分方程组$\frac{dX}{dt}=AX$在初始条件$X(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$下的解$X(t)$，并分析$t\to\infty$时$X(t)$的特性.
（参考线性系统理论）

三、已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$，向量$b=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}$；请解答下列问题

1. 求A的奇异值分解
2. 求$\max\limits_{\|z\|=1,\,z\in C^3}\|Az\|$的值，其中$\|\cdot\|$依次取向量1-范数；2-范数和∞-范数
3. 证明方程组$AX=b$不相容；并求向量b在A的列空间$R(A)$上的正交投影.
4. 求方程组$AX=b$的最小2-范数最小二乘解；并计算b到$R(A)$的最短距离.

四、设A为m阶常数方阵，X是$m\times n$型矩阵变量，请推导计算$\frac{d}{dX}\mathrm{Tr}(X^TAX)$的值.

五、请论证以下结论　严格.

1. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是行对角占优矩阵，记$\Lambda=\mathrm{diag}[a_{11},a_{22},\cdots a_{nn}]$
证明：$\rho(I-\Lambda^{-1}A)<1$　　定理6.4.4

2. 设矩阵$X\in C^{m\times n}$，且$\|X\|_2<r$；证明$XX^H-r^2I<0$.

2014 年.

一、

1. 证明:(1) $(a,b)\in Z^2$, $(c,d)\in Z^2$ $\quad f(a,b)=a \quad f(c,d)=c$

则: $f[(a,b)(c,d)]=f[(ac,bd)]=ac$

同理 $f[(a,b)+(c,d)]=f((a+c,b+d))=a+c$

$\Rightarrow$ 映射 f 为保运算的 即 f 为 Z^2 到 Z 的一个同态映射

(2). $\ker f=\{x\in Z^2 \mid f(x)=0\}=\{(0,y)\mid \forall y\in Z\}$

2. 证明:

设 n 维线性空间 V 中的基 $\varepsilon=\{e_1,\cdots e_n\}$ 任取 $\sigma\in \mathcal{L}(V)$ 设在 σ 线性变换下 ε 变为 $\varepsilon'=\{e_1',\cdots e_n'\}$ 从而 $\sigma(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'$ 由于线性无关

$$[\sigma(e_1),\sigma(e_2),\cdots \sigma(e_n)]=[e_1',\cdots,e_n']\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

令 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{nn} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ 则 $A\in F^{n\times n}$, 并且对确定的 σ, 有唯一的 A 与之对应,

同样对于给定的 $\sigma\in \mathcal{L}(V)$ 与之对应得证

3. (1) 证明: 当 $V=\langle\sigma^2|x\rangle$ 时, 不妨令 $\dim V=\dim\langle\sigma^2|x\rangle=n$. $\dim\langle\sigma|x\rangle=m$

从而有 $\langle\sigma^2|V\rangle=\mathrm{span}\{x,\sigma^2x,\cdots \sigma^{2(n-1)}x\}$

$\langle\sigma|V\rangle=\mathrm{span}\{x,\sigma x,\cdots\sigma^{(m-1)}x\}$.

$\because \langle\sigma|x\rangle\subset V$, $\therefore m\le n$

又 $\because x,\sigma^2x,\cdots,\sigma^{2(n-1)}x$ 中每个向量均可由 $x,\sigma x,\cdots,\sigma^{m-1}x$ 线性表示

且 $x,\sigma x,\cdots,\sigma^{m-1}x$ 线性无关

$\therefore m\ge n$

综上可知, $m=n$, $\dim\langle\sigma|x\rangle=\dim V$; 即: $V=\langle\sigma|x\rangle$.

(2). 举例反之不成立

作如下线性变换 $\sigma: R^2\to R^2$; $\sigma(x)=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}x$, $\forall x\in R^2$

取 $x=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 则 $\langle\sigma|x\rangle=\mathrm{span}\{x,\sigma x\}=\mathrm{span}\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\}=R^2$

$\langle\sigma^2|x\rangle=\mathrm{span}\{x,\sigma^2x\}=\mathrm{span}\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}=\mathrm{span}\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}\ne R^2$

4. 证明：由向量 $X\in V$ 在两组基下展开知：$X=\varepsilon[X]_\varepsilon=\varepsilon'[X]_{\varepsilon'}$

$\because$ ε 至 ε' 的过渡矩阵为 $T_{\varepsilon\varepsilon'}$ $\therefore$ $\varepsilon'=\varepsilon T_{\varepsilon\varepsilon'}$

$\therefore$ $\varepsilon[X]_\varepsilon=\varepsilon T_{\varepsilon\varepsilon'}[X]_{\varepsilon'}$

$\because$ 向量在一组基下的坐标唯一

$\therefore$ $[X]_\varepsilon=T_{\varepsilon\varepsilon'}[X]_{\varepsilon'}$

$\because$ ε' 与 ε 的列向量线性无关

$\therefore$ $T_{\varepsilon\varepsilon'}$ 可逆，从而 $[X]_{\varepsilon'}=T_{\varepsilon\varepsilon'}^{-1}[X]_\varepsilon$ 得证.

~~5. 证明：~~

$\Rightarrow$ $\because$ ~~$\sigma(X)=V'$，$\therefore\ \sigma(X)=\sum_{i=1}^{m}x_i e_i$，$x_i\in F$~~

~~构造设 f_i：$V\to F$~~

$\because$ ~~σ 为线性映射.~~

$\therefore$ ~~对 $\forall x,y\in V$ 有 $\sigma(x+y)=\sum_{i=1}^{m}z_i e_i=\sigma(x)+\sigma(y)=\sum_{i=1}^{m}x_ie_i+\sum_{i=1}^{m}y_ie_i$~~

5. 证明：

作投影算子 π_1：$V\to W$，π_1：$X\mapsto X_1$，则 $\pi_1\in\mathcal{L}(V)$.

$\because$ $V=W_1\oplus W_2$.

$\therefore$ 对 $\forall X\in V$，有唯一分解：$X=X_1+X_2$，$X_1\in W_1$；$X_2\in W_2$

$\therefore$ $\mathrm{Im}\,\pi_1=W_1$ $\quad\mathrm{Ker}\,\pi_1=W_2$.

对 $\forall X\in V$，有 $\pi_1^2(X)=\pi_1(\pi_1(X))=\pi_1(X)=X_1=\pi_1(X)$.

即：$\pi_1^2=\pi_1$；π_1 为幂等算子.

$\because$ 空间 V 中的任意向量 X 在 W_1 和 W_2 中分解唯一.

$\therefore$ π_1 是唯一满足条件的.

二、解：

1. $$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+2&0&1\\0&\lambda+2&0\\-1&0&\lambda\end{bmatrix}$$ ~~$d_0(\lambda)$~~ $d_0(\lambda)=1$ $\quad d_1(\lambda)=1$ $\quad d_2(\lambda)=\lambda+2$ $\quad d_3(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2$

$\phi_k(\lambda)=\dfrac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}\Rightarrow\phi_3(\lambda)=(\lambda+1)^2\quad\phi_2(\lambda)=\lambda+2\quad\phi_1(\lambda)=1$.

即：初等因子为 $(\lambda+1)^2$；$(\lambda+2)$；1； smith 标准形式：$\begin{bmatrix}1&&\\0&\lambda+2&\\0&0&(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$.

2. 求解 Jordan 标准形.

由(1). 初等因子为 $(\lambda+2)$，$(\lambda+1)^2$；则：特征值为 -2，-1，-1.

Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 最小多项式为 ~~$(\lambda+2)(\lambda+1)^2$~~ $d_3(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2$

$1[e^{1}\frac{y}{1}-\frac{y}{1}]=y\lambda$ $0=y\lambda(x-T'V)$

3. $\dot{x}=Ax$,

$X(t)=e^{At}\cdot X(0)$ $f(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2\Rightarrow\lambda_1=-2$ $\lambda_2=-1,\lambda_3=-1$

$\psi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{-2t}=a_0-2a_1-4a_2\\ e^{-t}=a_0-a_1+a_2\\ te^{-t}=a_1-2a_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=2te^{-t}+e^{-2t}\\ a_1=(3t-2)e^{-t}+2e^{-2t}\\ a_2=(t-1)e^{-t}+e^{-2t}\end{cases}$$

$$\therefore e^{At}=a_0I+a_1A+a_2A^2=\begin{bmatrix}(1+t)e^{-t}&0&-te^{-t}\\0&e^{-2t}&0\\te^{-t}&0&(1-t)e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}X(0)=e^{At}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-t)e^{-t}\\ \\ te^{-t}\end{bmatrix}$$ $t\to\infty$, $X(t)=e^{At}X(0)=[0,0,0]^T$

即：$X(t)$渐近稳定.

三、有关奇异值分解，范数，正交投影，广义逆和最小二乘解的相关问题

1. 求解奇异值分解：

由题：$A^HA=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}$ $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)\Rightarrow\lambda_1=4$ $\lambda_2=2$ $\lambda_3=0$

对应A的奇异值为 $\delta_1=2$ $\delta_2=\sqrt{2}$ $\delta_3=0$

当$\lambda_3=0$时 $(\lambda_3 I-A^HA)V_1=0\Rightarrow V_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

当$\lambda_2=2$时：$(2I-A^HA)V_2=0\Rightarrow V_2=(1,0,0)^T$

当$\lambda_1=4$时：$(4I-A^HA)V_3=0\Rightarrow V_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

$$\Rightarrow V=[V_1\,V_2\,V_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$\because r(A)=2$，$\therefore[y_1,y_2]=A[\frac{V_1}{\sqrt{\lambda_1}}\ \frac{V_2}{\sqrt{\lambda_2}}]=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}$

选取y_3与y_1,y_2正交的单位向量 取$y_3=[\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]^T$

则：$U=[y_1\,y_2\,y_3]=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ A的奇异值分解为：

$$A=U\begin{bmatrix}\Delta&0\\0&0\end{bmatrix}V^H=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}\ U\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\end{bmatrix}^H$$

2, $\max\limits_{\|x\|=1,\, x\in C^n} \|Ax\| = \|A\|_m$

$\Rightarrow$: $\|A\|_1 = 2$ $\quad \|A\|_2 = \sigma_1(A) = 2$ $\quad \|A\|_\infty = 2$.

3. 证明:

(1). 求解, A^+

由1中奇异值分解结果可得:

$$A^+ = V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^H = \begin{bmatrix}0 & 1 & \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ \frac12 & \frac12 & -\frac12 & -\frac12\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac12 & 0 & \frac12 & 0\\ 0 & \frac14 & 0 & \frac14\\ 0 & -\frac14 & 0 & -\frac14\end{bmatrix}$$

则: $AA^+b = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12 & 0 & \frac12 & 0\\ 0 & \frac14 & 0 & \frac14\\ 0 & -\frac14 & 0 & -\frac14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac32\\ \frac32\\ \frac32\\ \frac32\end{bmatrix} \neq b$

$\therefore$ 方程组 $Ax=b$ 不相容.

向量b在A的列空间 $R(A)$ 上的正交投影为 $[\frac32\ \frac32\ \frac32\ \frac32]^T$.

4. 方程组 $Ax=b$ 的二范数最小二乘解:

$$x = A^+b = \begin{bmatrix}\frac12 & 0 & \frac12 & 0\\ 0 & \frac14 & 0 & \frac14\\ 0 & -\frac14 & 0 & -\frac14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac32\\ \frac34\\ -\frac34\end{bmatrix}$$

向量b到 $R(A)$ 的最短距离:

$$d = \|Ax-b\| = \|AA^+b-b\| = \|[\tfrac12\ -\tfrac12\ -\tfrac12\ \tfrac12]^T\| = 1$$

四、证明:

x^TA 的第j行元素为 $(\sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{p1}, \sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{p2}, \cdots, \sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{pm})$.

x^TAx 的第j行第j列元素为: $\sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{p1}x_{1j} + \cdots + \sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{pm}x_{mj}$.

$\therefore Tr(x^TAx) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{p1}x_{1j} + \cdots + \sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{pm}x_{mj})$

$\frac{\partial Tr(x^TAx)}{\partial x_{ij}} = a_{i1}x_{1j} + \cdots + a_{im}x_{mj} + \sum_{p=1}^{m} x_{pj}a_{pi} = \sum_{p=1}^{m} a_{ii}x_{ij}$.

$\frac{d\,Tr(x^TAx)}{dx} = Ax + A^Tx = (A+A^T)x$.

$\Rightarrow \frac{d\,Tr(x^TAx)}{dx} = \frac{d\,\cancel{Tr(x^TAx)}}{\cancel{x}}Ax + (x^TA)^T = Ax + A^Tx = (A+A^T)x$

六、(1) 证明：

$\Lambda = diag[a_{11}, a_{22} \cdots a_{mn}]$

$\Lambda^{-1} = diag(\frac{1}{a_{11}}, \cdots \frac{1}{a_{mn}})$

$$\Lambda^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad I - \Lambda^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

∵ A为~~行~~严格行对角占优阵

∴ $\|I - \Lambda^{-1}A\|_\infty < 1$； $\Rightarrow \rho(I - \Lambda^{-1}A) < 1$

（矩阵的谱半径不大于矩阵A的任何一~~种~~范数：$\rho(A) \le \|A\|$）

(2) 证明：$\|X\|_2 = \sigma_1(X) < \gamma$

令 $X = U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$， $\Sigma = diag\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_r\}$， $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r$

则：$XX^H = U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H V \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H = U\begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H$

$XX^H - \gamma^2 I = U\begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - U\, diag\{\gamma^2, \cdots \gamma^2\}\, U^H$

$= U\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} U^H$

其中：$T = diag\{\sigma_1^2 - \gamma^2, \sigma_2^2 - \gamma^2, \cdots \sigma_r^2 - \gamma^2\}$

$S = diag\{\underbrace{-\gamma^2, \cdots, -\gamma^2}_{m-r个}\}$

∵ $\|X\|_2^2 = \sigma_1^2 < \gamma^2 \Rightarrow \sigma_i^2 - \gamma^2 < 0$

即：$XX^T - \gamma^2 I < 0$