

中国科学技术大学研究生考试试卷

考试科目: 矩阵代数

考试日期: 2023 年 1 月 6 日

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一. [15分] 证明: 由集合 S 的所有子集作成的集合 2^S (幂集), 关于运算

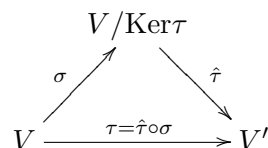
$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$AB = A \cap B$$

构成一个有单位元的交换环.

二. [15分] 证明: 线性空间上的线性映射 $\tau \in \mathcal{L}(V, V')$, 通过商空间 $V/\text{Ker}\tau$ 可作映射分解

$$\tau = \hat{\tau} \circ \sigma$$



其中自然映射 $\sigma: x \mapsto x + \text{Ker}\tau$ 是满线性映射, 诱导映射 $\hat{\tau}: x + \text{Ker}\tau \mapsto \tau(x)$ 是单线性映射.

三. [15分] 考查三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 的子空间

$$W = \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

及其正交补空间 W^\perp .

1. 求子空间 W 和 W^\perp 的基.
2. 求从 \mathbb{R}^3 到 W 的正交投影算子对应的投影矩阵.

四. [20分] 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. [9分] 求 A 的行列式因子、不变因子和初等因子.
2. [5分] 求 A 的 Jordan 标准形.
3. [6分] 求 e^{At} .

五. [10分] 设 $A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$

1. [5分] 证明矩阵序列 $\{A^k\}$ 收敛, 并求 $k \rightarrow \infty$ 时的极限.
2. [5分] 证明矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛, 并求其无穷和.

六. [15分] 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1. [7分] 求 A 的一个非平凡最大秩分解.
2. [8分] 判断方程组 $AX = b$ 是否相容, 并求其极小范数解.

七. [10分] 证明:

1. [5分] 正交矩阵 A 的特征值为 $+1$ 或者 -1 .
2. [5分] 设非负矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的每一行元素之和为常数 a , 证明 A 的谱半径

$$\rho(A) = \|A\|_{\infty}.$$