2013

一、解答下述问题，必要时给出相应的证明

1. 由集合 S 的所有子集组成的集合 2^S，关于 $A+B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ 和 $AB=A\cap B$ 两种运算构成一个有单位元的环；试证之 （习题2.1 13））

2. 写出多项式环中由两个多项式 $\lambda-1$，$\lambda^2-\lambda$ 所生成的理想，并给出该理想的首一生成元。 （P37~38）

3. 写出线性空间上的同态基本定理，并举出有限维空间中的一个例子说明（P61）

4. 线性变换 σ 对向量 V 生成的循环子空间 $\langle\sigma|V\rangle$ 是包含 V 的最小 σ 不变子空间，证之 （几个循环的概念）

5. 写出三维欧式空间中任一向量向平面 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ 作正交投影的投影矩阵，其中 a_1, a_2, a_3 是常数 （P124）

二、考查区间 $[-1,1]$ 上的连续函数空间 $V=R[-1,1]$；令偶函数（满足 $f(-x)=f(x)$）子集为 V_e，奇函数（满足 $f(-x)=-f(x)$）子集为 V_o， （习题4.1 (4)）

1. 证明 V_e 与 V_o 均是 V 的子空间，且 $V=V_e\oplus V_o$. （P47；8空间的概念）

2. 给定（线性）积分算子 $(Tf)(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，问 V_e 与 V_o 是否在 T 下不变。

三、给定方阵 $A=\begin{bmatrix}-3&0&1\\1&-2&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ 请解答下列问题

1. 求特征矩阵 $\lambda I-A$ 在复数域上的初等因子和Smith标准形；

2. 求 A 的Jordan标准形和最小多项式

3. 求线性微分方程组 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 在初始条件 $x(0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 下的解 $x(t)$.

四、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，向量 $b=\begin{bmatrix}5\\0\\5\\0\end{bmatrix}$，请解答下列问题：

1. 求 A 的一个奇值分解.

2. 求 $\max\limits_{\|x\|=1,\, x\in C^3}\|Ax\|$ 的值，其中 $\|\cdot\|$ 依次取1-范数；2-范数；∞-范数

3. 证明方程组 $Ax=b$ 不相容，并求向量 b 在 A 的列空间 $R(A)$ 上的正交投影.

4. 求方程组 $Ax=b$ 的最小2-范数最小二乘解，并计算向量 b 到 $R(A)$ 的最短距离

五、请解答以下问题 ⇐ 证明正规；正规矩阵可酉相似对角化

1. 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$，$B\in C^{m\times m}$ 均为正规矩阵，证明 $\boxed{A\otimes B}$ 可酉相似对角化

2. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，证明：$|\det A|\le\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$.

3. 假定 $A\in R^{n\times n}$ 为常量矩阵，$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in R^n$ 为矢量型变量，请推导计算 $\frac{d}{dx}\|Ax\|_2$ 的值，其中 $\|\cdot\|_2$ 为向量2-范数.

2013年

一，问题及证明：

1. (问题 2.3).

证明：① 证明 $(2^S, +)$ 构成群.

结合律 $(A+B)+C = A+(B+C)$；单位元为空集；逆元为其自身.

② 证明 $(2^S, \cdot)$ 构成半群

结合律：$(AB)C = A(BC)$；

③ 对 $A, B, C \in 2^S$ 有：

$(A+B)\cdot C = AC+BC$；$A(B+C) = AB+AC$，

乘法对加法构成分配律.

④ $\forall A \in 2^S$ 有 $S \in 2^S$，使 $A\cdot S = A\cap S = A = S\cap A = S\cdot A$，

综上①②③④，$(2^S, +, \cdot)$ 构成一个有单位元的环.

2. 生成的主理想为 $(\lambda-1, \lambda^2-\lambda) = \{ g(\lambda) = M_1(\lambda)(\lambda-1) + M_2(\lambda)(\lambda^2-\lambda) \}$.

其中 $M_1(\lambda)$ 和 $M_2(\lambda)$ 均为 λ 的多项式；首一生成元为 $gcd(\lambda-1, \lambda^2-\lambda) = \lambda-1$.

3. 线性空间上的线性映射 $\sigma: V \to V'$，商空间 $V/\ker\sigma$ 与象空间 $Im\,\sigma$ 线性同构，$V/\ker \simeq Im\,\sigma$.

举例：R 上的函数 $f(x) = x$，$f: R \to R$，显然 f 为同态映射.

则：$R/\ker f = \{\hat{x}, x \in R\}$，其中 $\hat{x} = \{x\}$，$Im\,f = R$

一定存在线性 1-1 映射 $f: R/\ker f \to Im\,f$；故 $R/\ker f \simeq Im\,f$.

4. 证明：设 σ 在向量 V 的极小多项式为 $\varphi(\lambda)$ 且 $deg[\varphi(\lambda)] = m$.

则：$V, \sigma V, \cdots \sigma^{m-1}V$ 线性无关，$\langle \sigma|V \rangle = span\{V, \sigma V, \cdots, \sigma^{m-1}V\}$

若有 W 为包含 V 的不变子空间：则 $\sigma, \sigma V, \cdots \sigma^{m-1}V \in W$.

从而 $\langle \sigma|V \rangle \subset W$，于是不变子空间具有最小性，

对 $\forall x \in \langle \sigma|V \rangle$，有 $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma^{i-1} V$，$\alpha_i \in F$，$i = 1, 2, \cdots m$.

$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma^i V$

考虑 $m+1$ 个向量 $V, \sigma V, \cdots \sigma^m V$ 在 m 维空间有线性表示.

$\sigma^m V = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sigma^{i-1} V \quad \beta_i \in F \quad i = 1, \cdots m$.

于是 $\sigma(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma^i V = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma^i V + \sum_{i=1}^{m} \alpha_m \beta_i \sigma^{i-1} V$

$= (\alpha_m \beta_1)V + (\alpha_1 + \alpha_m\beta_2)\sigma V + \cdots + (\alpha_{m-1} + \alpha_m \beta_m)\sigma^{m-1} V \in \langle \sigma|V \rangle$

即：$\langle \sigma|V \rangle$ 对 σ 具有不变性.

综上所述：$\langle \sigma|V \rangle$ 是包含 V 的最小不变子空间.

5. 取与列$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$正交向量 $[0, a_3, -a_2]^T$ 与 $[a_3, 0, -a_1]^T$ 将两列施密特正交化

得两单位正交列 $[e_{21}, e_{22}, e_{23}]^T$ $[e_{31}, e_{32}, e_{33}]^T$，则：$\{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\}$

$=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} e_{21} & e_{31} \\ e_{22} & e_{32} \\ e_{23} & e_{33} \end{bmatrix}\right\}$，正交投影矩阵 $P=\begin{bmatrix} e_{21} & e_{31} \\ e_{22} & e_{32} \\ e_{23} & e_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_{21} & e_{31} \\ e_{22} & e_{32} \\ e_{23} & e_{33} \end{bmatrix}^H$.

二，(1). 证明：

① 显然，当 $f(x)=0$，$\forall x\in[-1,1]$ 有 $f(x)\in V_e$，且 $f(x)\in V_o$.

V_e 与 V_o 均为非空子集.

对 $\forall f, g\in V_e$，$\forall \alpha, \beta\in[-1,1]$ 有：

$(\alpha f+\beta g)(-x)=\alpha f(-x)+\beta g(-x)=\alpha f(x)+\beta g(x)=(\alpha f+\beta g)(x)$

$\Rightarrow \alpha f+\beta g\in V_e \Rightarrow V_e$ 是 V 的子空间.

对 $\forall f, g\in V_o$，$\forall \alpha, \beta\in[-1,1]$ 有

$(\alpha f+\beta g)(-x)=\alpha f(-x)+\beta g(-x)=-\alpha f(x)-\beta g(x)=-(\alpha f+\beta g)(x)$

$\Rightarrow \alpha f+\beta g\in V_o \Rightarrow V_o$ 为 V 的子空间

② 对 $\forall f\in V_e\cap V_o$ 有 $f\in V_e$ 且 $f\in V_o$ 从而.

$$\left.\begin{aligned} f\in V_e &\Rightarrow f(-x)=f(x) \\ f\in V_o &\Rightarrow f(-x)=-f(x) \end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=-f(x)\Rightarrow f(x)=0$$

即：$V_o\cap V_e=\{0\}$

对 $\forall f\in V$，令 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)\Rightarrow g(x)\in V_e$

$h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)\Rightarrow h(x)\in V_o$

假设存在 $g'(x)\in V_o$，$h'\in V_o$，$f(x)=g'(x)+h'(x)$.

$$\left.\begin{aligned} g(x)+h(x)&=g'(x)+h'(x) \\ g(x)-h(x)&=g'(x)-h'(x) \end{aligned}\right\}\Rightarrow g'(x)=g(x) \quad h'(x)=h(x).$$

综上所述：$V=V_e\oplus V_o$.

③ $\forall f\in V_e$ 有 $(Tf)(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt=\int_0^{x}f(-u)\,d(-u)=-\int_0^{x}f(u)\,du=-(Tf)(x)$.

显然 $Tf\notin V_e$，而 $Tf\in V_o$，从而 V_e 不在 T 下不变.

对 $\forall f\in V_o$ 有 $(Tf)(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt=\int_0^{x}f(-u)\,du=\int_0^{x}f(u)\,du=(Tf)(x)$

显然 $Tf\notin V_o$ 而 $Tf\in V_e$，从而 V_o 不在 T 下不变.

三、解:

1. $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+3 & 0 & -1\\ -1 & \lambda+2 & 1\\ 1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}$ $\quad d_0(\lambda)=1,\quad d_1(\lambda)=1\quad d_2(\lambda)=\lambda+1$ 对

$d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)^2$

$\Rightarrow \phi_3(\lambda)=(\lambda+2)^2\quad \phi_2(\lambda)=(\lambda+1)\quad \phi_1(\lambda)=1$

即: 初等因子为 $(\lambda+2)^2$, $(\lambda+1)$, 1,

Smith 标准形式: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+2)^2\end{bmatrix}$

2. 由(1)可知 $[\lambda I-A]$ 的初等因子为 $(\lambda+1)$, $(\lambda+2)^2$

则: ~~A=~~ $|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=-2$.

Jordan 标准形式: $\left[\begin{array}{c|cc}-1 & 0 & 0\\ \hline 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{array}\right]$.

最小多项式为 $d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)^2$

3. 由题: $X(t)=e^{At}X(0)=e^{At}[0\ 1\ 0]^T$.

由待定系数法求得:

$$\Rightarrow \begin{cases}a_0=\frac{12}{9}e^{-t}-\frac{1}{9}e^{-2t}-2te^{-2t}\\ a_1=\frac{9}{9}e^{-t}-\frac{9}{9}e^{-2t}-3te^{-2t}\\ a_2=\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{1}{9}e^{-2t}+te^{-2t}\end{cases}$$

$$X(t)=e^{At}[0\ 1\ 0]^T\begin{bmatrix}\frac{e^{-t}}{9}-\frac{e^{-2t}}{9}-te^{-2t}\\ \frac{3}{9}e^{-t}-\frac{3}{9}e^{-2t}-3te^{-2t}\\ -\frac{2e^{-t}}{9}+\frac{2}{9}e^{-2t}+2te^{-2t}\end{bmatrix}$$

$t\to\infty\quad X(t)\to 0$

渐近稳定

四: 解:

(1). $A^HA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & -1\\ 2 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -\lambda+5 & (\lambda-2)(\lambda-3)-1\\ 0 & \lambda-5 & 2\lambda-5\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}$

$=\lambda(\lambda-3)(\lambda-5)=0$

解得: $\lambda_1=5$, $\cancel{\lambda_2=\lambda_3=5}$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=0$

则: $\sigma_1=\cancel{\sigma}\sqrt{5}$, $\sigma_2=\sqrt{3}$, $\sigma_3=0$

接下来~~的该怎么处理~~ ~~(有重根时，怎么求U和V)~~

可得: $\begin{cases}(\lambda_1 I-A)V_1=0\\(\lambda_2 I-A)V_2=0\\(\lambda_3 I-A)V_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}V_1=[\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0]^T\\V_2=[\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}}]^T\\V_3=[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T\end{cases}$

则: $V=[V_1\ V_2\ V_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$.

计算U的值: $[y_1,y_2]=A[\frac{V_1}{\sqrt{5}},\frac{V_2}{\sqrt{3}}]=A\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\\0&\frac{\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0\\\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

取 $y_3=[\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0]$, 保证与 y_1, y_2 正交.

则: $U=[y_1\ y_2\ y_3]=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}$.

奇异值分解: $A=U^H\begin{bmatrix}\Delta&0\\0&0\end{bmatrix}V^H=$

$=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0&0\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$.

2, $\|A\|_1=3\quad \|A\|_2=\sqrt{5}\quad \|A\|_\infty=2$.

3. $A^+=V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}U^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{10}}&0&\frac{1}{\sqrt{10}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}$.

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{4}{15}&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{15}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{15}\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$AA^+=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{4}{15}&\frac{1}{5}&\frac{4}{15}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{15}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{15}\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$.

$AA^+b=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\\4\\2\end{bmatrix}\neq b$ 不相容.

4. 最小二乘解为: $A^+b=\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}$ $\quad\|AA^+b-b\|_2=\|(-1,-2,-1,2)\|_2=\sqrt{10}$.

五、证明:

1. 证明: A、B均为正规矩阵，则A、B均可酉对角化，$A=U_1\Lambda_1U_1^H$ · $B=U_2\Lambda_2U_2^H$

则 $A\otimes B=(U_1\Lambda_1U_1^H)\otimes(U_2\Lambda_2U_2^H)=(U_1\otimes U_2)(\Lambda_1\otimes\Lambda_2)(U_1^H\otimes U_2^H)^H$

而 $(U_1^H\otimes U_2^H)(U_1^H\otimes U_2^H)=(U_1^H U_1^H)\otimes(U U_2^H)=I_n\otimes I_m$

~~所以~~ $(U_1\otimes U_2)^H(U_1\otimes U_2)=I_n\otimes I_m$，即: $U_1\otimes U_2$为酉阵.

而$\Lambda_1\otimes\Lambda_2$为对角阵.

所以 $A\otimes B$可以酉相似对角化.

2. ~~深看~~ 证明.

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}|a_{1j}|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}|a_{nj}|}\end{pmatrix}A$$

令 $\Delta=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$

$\cancel{B=\Delta A}$ $\rho(B)\le\max\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|=1$

$\det B=\frac{1}{\Delta}|A|\le 1 \Rightarrow \det|A|\le\Delta=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right).$

综上 原命题得证.

3. 相当于一个标量对向量X求导. $AX=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)_{i=1,\cdots,n}$

则: $\|AX\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2}$.

则: $$\frac{d\|AX\|_2}{dx_l}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2}}\cdot\sum_{i=1}^{n}2\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)a_{il}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{il}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2}}$$

$$\frac{d\|AX\|_2}{dX}=\left(\frac{d\|AX\|_2}{dx_1},\cdots,\frac{d\|AX\|_2}{dx_n}\right)^T.$$