中国科学技术大学2023春季学期 实分析H期末考试

助教：Junhao Tian

1.（10分）举例说明下面两个包含关系均为真包含关系

$$Lip[0,1] \subset AC[0,1] \subset BV[0,1]$$

前一小问来自第26次课ppt的第12页，后一小问来自第24次课ppt的第28页。

2.（10分）已知有两列非负可积函数 $\{f_j\}$, $\{g_j\}$ 分别几乎处处收敛到 f, g，且 $|f_j(x)| \leqslant g(x)$，若 $\{g_j\}$ 依 L^1 范数收敛，试证明：$\{f_j\}$ 也依 L^1 范数收敛。本题出自第15次课ppt第26、27页。

3.（10分）已知有两列非负可积函数 $\{f_j\}$, $\{g_j\}$ 分别依测度收敛到 f, g，试判断：$\{f_j g_j\}$ 是否依测度收敛到 fg？解释理由。
本题改编自作业题课本P127页第12题。

参考答案：是。

4.（10分）举例说明 Fubini 定理对一般可测函数不一定正确。本题出自第21次课ppt的第23页。

5.（10分）证明 $\mathbb{R}^3$ 中存在可数个互不相交的闭集小球 $B_j \subset [0,1]^3$，使得

$$m([0,1]^3 \backslash (\cup_j B_j)) = 0$$

参考答案：包含于 $[0,1]^3$ 的所有小球 B_j 构成 $[0,1]^3$ 的 Vitali 覆盖，由 Vitali 覆盖定理本题得证。（高维 Vitali 覆盖定理在第22次ppt的第23页注记）

6.（15分）设 $f(x) \in L^1(E)$ 是一个可积函数请写出分布函数 $f_*(t)$ 的定义并证明

$$\int_E |f(x)| dx = \int_0^\infty f_*(t) dt$$

本题出自第23次课ppt的第4～8页。

7.（10分）判断对错并给出理由。
（1）单调递增函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的导数几乎处处存在，导函数可测且

$$f'(x)\in L^+(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$$

（2）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是单调函数，则 $\int_0^1 f'(x)=f(1)-f(0)$
（3）函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 广义黎曼可积，Lebesgue 可积，则两个积分值相同。
本题（1）小问来自第23次课ppt的第12页，（2）小问来自第23次课ppt的第30页，（3）小问来自第20次课ppt的第28页。

参考答案：（1）错误，反例：$f(x)=x$，$f'(x)=1$，不可积。（2）错误，反例：康托函数。（3）正确。

8.（10分）证明 $L^\infty(E)$ 空间是 Banach 空间。
本题出自第28次课ppt的第27页。

9.（10分）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^{3/2}\sin(\frac{1}{x}) & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

证明 $V_0^1 f\leqslant 3$
本题出自第26次课ppt的第4～6页。

10.（10分）设 $f\in L^1[a,b]$，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt=0$$

几乎处处成立。
本题出自第25次课ppt的第26～28页。