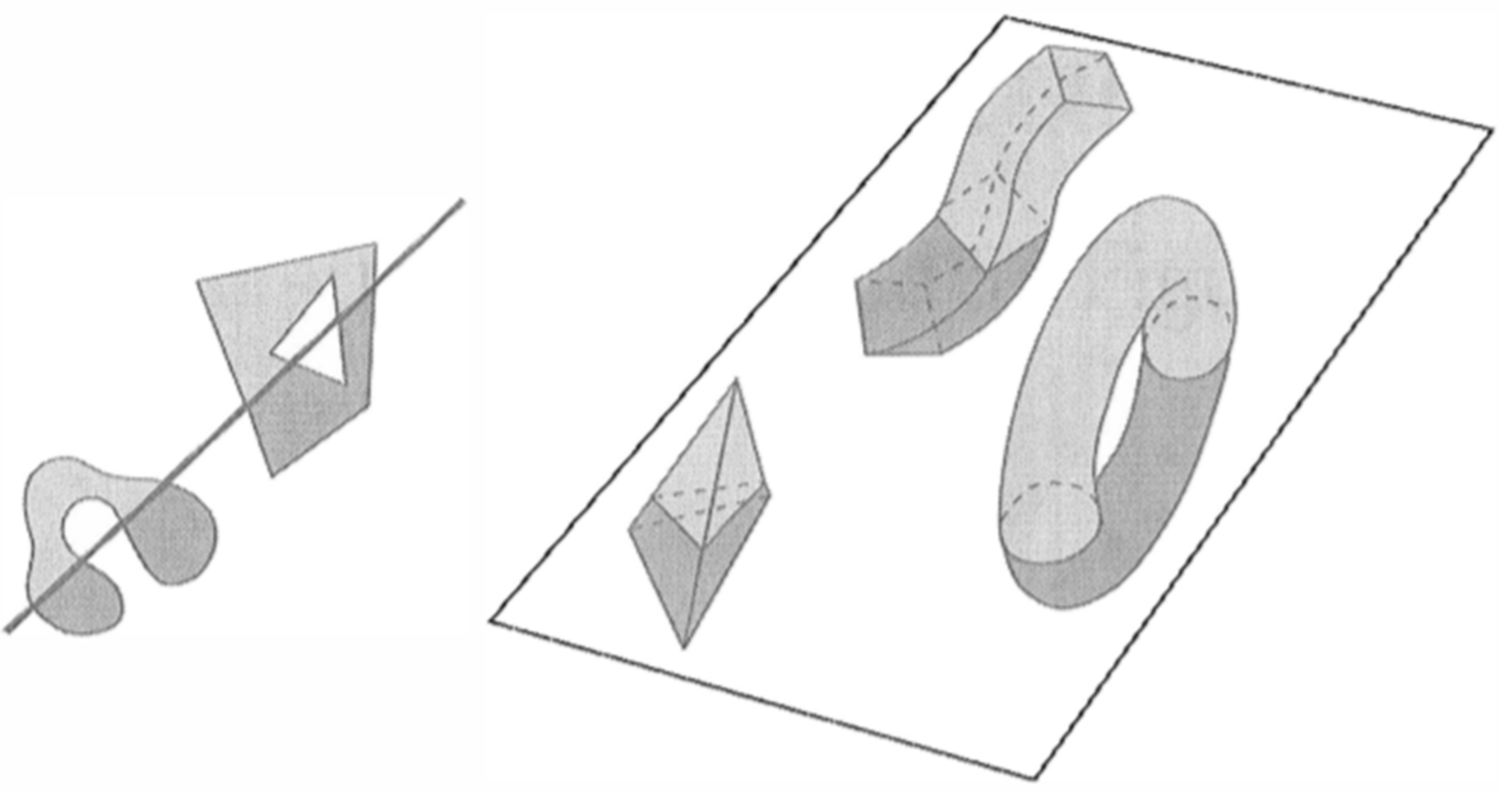
泛函分析

Math1014 1.44 版

何家志 整理
授课教师: 许小卫
2022 年 4 月 2 日



本文档为我整理的泛函分析笔记, 仅供学习交流.[1]教材: 张恭庆等《泛函分析讲义》(第二版), 参考书: 许全华等《泛函分析讲义》, 有兴趣可阅读《泛函分析史》. 泛函分析的研究对象为无限维线性空间及它们之间的线性算子 (映射) 的性质 + 拓扑条件. 主要包括以下几部分内容:

1. (一般) 度量空间: 定义, 完备化, 完备度量空间刻画, 度量空间的紧性, 紧空间上的连续函数.
2. 赋范空间
   - 基本性质: 有限维空间的刻画
   - 线性算子: 赋范空间之间的线性映射
   - 三大定理: 开映射定理; 闭图像定理; 共鸣定理
3. Hilbert 空间: 基本概念, 正交投影
4. 线性泛函
   - Hilbert 空间上线性泛函,Riesz 表示定理
   - Hahn-Banach 定理 (实, 复)
   - 几何刻画: 凸集分离定理
   - 共轭理论: 弱收敛, $*$ 弱收敛
5. 谱理论
   - 闭算子的谱,Gelfand
   - 紧算子及紧算子的谱理论

[1]邮箱:hjz346594825@mail.ustc.edu.cn

目录

1 度量空间 **7**
- 1.1 度量空间 . . . 7
  - 1.1.1 定义 . . . 7
  - 1.1.2 度量空间上的拓扑 . . . 8
  - 1.1.3 连续映射 . . . 9
- 1.2 度量空间的完备化 . . . 9
  - 1.2.1 等距映射 . . . 10
  - 1.2.2 完备化 . . . 10
  - 1.2.3 Baire 纲定理 (刻画完备化) . . . 14
- 1.3 压缩映射定理 . . . 17
  - 1.3.1 压缩映射定理 . . . 17
  - 1.3.2 应用 . . . 18
- 1.4 度量空间中的紧性 . . . 22
  - 1.4.1 列紧集 . . . 22
  - 1.4.2 紧集 . . . 24
- 1.5 紧集上的连续函数空间 . . . 26

2 赋范空间 **29**
- 2.1 赋范空间 . . . 29
  - 2.1.1 赋范空间 . . . 29
  - 2.1.2 有限维赋范空间 . . . 31
  - 2.1.3 商空间 . . . 34
- 2.2 线性算子 . . . 36
  - 2.2.1 定义 . . . 36
  - 2.2.2 有界算子空间 . . . 37
- 2.3 有界算子的基本定理 . . . 40
  - 2.3.1 开映射定理 . . . 41
  - 2.3.2 闭算子 . . . 42
  - 2.3.3 共鸣定理 . . . 45

3 Hilbert 空间 **46**

3.1 内积 47

3.1.1 定义 47

3.1.2 内积与范数 49

3.2 Hilbert 空间的基 51

3.2.1 正交 51

3.2.2 Hilbert 空间的基 53

3.2.3 可分 Hilbert 空间的结构 56

3.3 正交分解 58

3.3.1 点到闭凸子集的最佳逼近 58

3.3.2 正交分解 60

3.3.3 正交投影算子 61

3.4 Riesz 表示定理 62

3.4.1 Riesz 表示定理 62

3.4.2 有界共轭双线性型的表示 64

3.4.3 Radon-Nikodym 定理 67

4 Hahn-Banach 定理 (线性泛函) **69**

4.1 Hahn-Banach 定理 69

4.1.1 有限维线性空间上的线性泛函 69

4.1.2 线性空间上线性泛函的延拓 70

4.1.3 赋范空间中泛函的延拓 73

4.2 凸集分离 75

4.2.1 凸集的 Minkowski 泛函 75

4.2.2 超平面 (极大线性流形) 77

4.3 凸集分离 (实线性空间) 78

5 共轭理论 **80**

5.1 共轭空间 80

5.1.1 定义 81

5.1.2 例子 82

5.2 共轭算子 84

5.2.1 定义 85

5.2.2 例子 87
5.3 弱收敛与 * 弱收敛 88
5.3.1 弱收敛 89
5.3.2 * 弱收敛 90
5.3.3 算子的几种收敛方式 91
5.4 弱列紧性与 * 弱列紧性 93
5.4.1 可分空间共轭空间中有界列的 * 弱列紧性 93
5.4.2 自反赋范空间中有界列的弱列紧性 94

6 谱理论 95
6.1 算子的谱 96
6.1.1 谱的定义 96
6.1.2 谱的存在性 98
6.1.3 谱半径估计 101
6.1.4 例子 102
6.2 紧算子 104
6.2.1 定义 104
6.2.2 全连续算子 107
6.2.3 有限秩算子 107
6.2.4 紧算子的逼近 108
6.3 Riesz-Fredholm 理论 111
6.3.1 记号约定与定理描述 111
6.3.2 定理的证明 112
6.4 Riesz-Schauder 理论 116
6.4.1 紧算子的谱 117
6.4.2 紧算子不变子空间的存在性 118
6.4.3 紧算子的结构 119
6.5 Hilbert-Schmidt 定理 120
6.5.1 对称算子 120
6.5.2 紧对称算子的谱 122
6.6 Fredholm 算子 125
6.6.1 Fredholm 算子 125

6.6.2 Fredholm 算子指标的性质 127

7 一些补充内容和总结 129

7.1 完备度量空间的刻画-闭球套定理 129

7.2 第一纲集, 第二纲集有关性质 131

7.3 紧性 132

7.4 集合列紧性判别法补充 137

7.5 有关线性基 138

7.6 Banach 闭图像定理的应用:Hellinger-Toeplitz 定理 140

7.7 有界线性算子 (泛函) 的性质 140

1　度量空间

本章主要介绍一般度量空间的基本概念及性质, 主要包括度量空间的完备性, 紧性等.

1.1　度量空间

1.1.1　定义

回忆 $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, 定义映射 $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\rho(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

则 ρ 有性质:

(1) 正定性: $\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(2) 对称性: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(3) 三角不等式: $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

定义 1.1. 设 X 是非空集合, 若映射 $\rho : X \times X \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \rho(x,y) \in \mathbb{R}$ 满足上述性质 $(1),(2),(3)$, 称 ρ 是 X 上的一个 度量 或 距离, (X,ρ) 称为 度量空间.

[注记: (X,ρ) 为度量空间, $X' \subset X$, 则 $(X', \rho|_{X' \times X'})$ 也是一个度量空间.]

例子:

1. $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ 是度量空间

$$\rho_\infty(x,y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

2. $(\mathbb{R}^n, \rho_p), p \geq 1$ 是度量空间

$$\rho_p(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

三角不等式用 Minkowski 不等式证明.　[注记: 同一个集合上可以有不同的度量.]

3. $\mathrm{C}[a,b] := \{x(t) \mid x(t)$是$[a,b]$上的连续函数$\}$

$$\rho(x,y) := \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

则 $(\mathrm{C}[a,b], \rho)$ 是度量空间.

4. 对 $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\rho(u,v) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u-v|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $(L^p(\mathbb{R}^n), \rho)$ 是度量空间.

1.1.2 度量空间上的拓扑

(X,ρ) 度量空间,$x_0 \in X, r > 0$

$$B_r(x_0) := \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$$

称为 X 中以 x_0 为球心, r 为半径的开球.

定义 1.2. (X,ρ) 是度量空间, $O \subset X$ 是子集, 若 $\forall x \in O, \exists r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset O$, 称 O 为 X 的一个开集. 若 X 的子集 F 满足 F^c 是 X 中的开集, 称 F 是 X 的一个闭集.

开集有性质:

(1) ϕ, X 是开集

(2) 若 $O_1, \cdots, O_n \subset X$ 是开集, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} O_k \subset X$ 是开集.

(3) 若 $O_\alpha \subset X$ 是开集, $\alpha \in \Lambda$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \subset X$ 是开集.

[注记: 给定集合 X, 及 X 上一个子集族 $\mathscr{T}$, 若 $\mathscr{T}$ 中元素满足上面性质 (1), (2), (3), 称 $\mathscr{T}$ 为 X 上的一个 拓扑 , $(X, \mathscr{T})$ 称为 拓扑空间.]

定义 1.3. (X,ρ) 度量空间, $\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, 称 x_n 收敛于 x_0, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 或 $x_n \to x_0$. 若 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$, 称 $\{x_n\}$ 为 X 中的基本列或 *Cauchy* 列.

1.1.3 连续映射

定义 1.4. $(X,\rho),(Y,\rho')$ 是度量空间, 若映射 $\varphi: X \to Y$ 满足对 $\forall x \in X$, 若 $x_n \to x$, 有 $\rho'(\varphi(x_n),\varphi(x)) \to 0 (n \to \infty)$, 称 φ 是连续映射.

[注记: φ 连续 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta = \delta(x,\varepsilon)$ 使得 $\varphi(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(\varphi(x))$.]

性质 1.5. φ 是度量空间 $(X,\rho),(Y,\rho')$ 之间的连续映射 $\Longleftrightarrow$ 对 Y 中的任意开集 O , $\varphi^{-1}(O) := \{x \in X \mid \varphi(x) \in O\}$ 是 X 中的开集. 即开集的原像是开集

证明. $(\Longrightarrow)$ $\forall x \in \varphi^{-1}(O), \varphi(x) \in O$, 由 $O \subset Y$ 是开集, $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(\varphi(x)) \subset O$. 由上面的注记, $\exists \delta > 0$, 使得

$$\varphi(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(\varphi(x))$$

即 $B_\delta(x) \subset \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x))) \subset \varphi^{-1}(O)$, 即 $\varphi^{-1}(O) \subset X$ 是开集.

$(\Longleftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X$, 因为 $B_\varepsilon(\varphi(x)) \subset Y$ 是开集, 由条件得 $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x))) \subset X$ 是开集, 且 $x \in \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$. $\exists \delta > 0$ 使得 $B_\delta(x) \subset \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$, 即

$$\varphi(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(\varphi(x))$$

即 φ 在 x 处连续. □

1.2 度量空间的完备化

本节主要内容: 把从有理数建立实数系的过程推广到一般度量空间的情形, 此外, 为了分类度量空间, 引入等距的概念.

1.2.1 等距映射

定义 1.6. $(X,\rho),(Y,\rho')$ 是度量空间, 若映射 $\varphi: X\to Y$ 满足:

$$\rho(x,y)=\rho'(\varphi(x),\varphi(y)),\forall x,y\in X$$

称 φ 是 (X,ρ) 到 (Y,ρ') 的一个 *等距 (映射)*, 特别地, 若 φ 还是满射, 称 φ 是 (X,ρ) 到 (Y,ρ') 的一个等距同构.

[注记: (1) 条件保证了 φ 是单射且连续. (2) 若 φ 是一个等距, 把 (X,ρ) 与 $(\varphi(X),\rho'|_{\varphi(X)\times\varphi(X)})$ 等同, 则 (X,ρ) 可以看成 (Y,ρ') 的一个子空间.(3) 若 φ 是等距同构, 今后不区分 (X,ρ) 与 (Y,ρ')(在等距同构意义下).(4) 从 (X,ρ) 到 (Y,ρ') 的等距映射不一定唯一, 例如平移 $\varphi_a:\mathbb{Q}\to\mathbb{R},q\mapsto q+a$ 是等距.]

1.2.2 完备化

回顾有理数集 $\mathbb{Q}$ 与实数集 $\mathbb{R}$ 有如下关系:
(1) $\mathbb{R}$ 是完备的
(2) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$
(3) $\forall x_0\in\mathbb{R},r>0,\exists x\in\mathbb{Q}$ 使得 $x_0\in B_r(x)$, 即 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. [性质 (3) 说明 $\mathbb{R}$ 中元素都可以看成 $\mathbb{Q}$ 中基本列的极限.]

定义 1.7. 若度量空间 (X,ρ) 中任意基本列都收敛, 称 (X,ρ) 是 *完备的*.

完备度量空间的例子:
(1) $(\mathbb{R}^n,\rho),(\mathbb{R}^n,\rho_\infty),(\mathbb{R}^n,\rho_p),p\geq 1$ 都是完备度量空间.
(2) $(\mathrm{C}[a,b],\rho)$ 是完备的, $\rho(x,y):=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$

证明. 设 $\{x_n\}\subset\mathrm{C}[a,b]$ 是基本列, 那么对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n,m>N$ 时, 有

$$|x_n(t)-x_m(t)|\leq\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_m(t)|=\rho(x_n,x_m)<\varepsilon \tag{1.8}$$

于是, $\forall t\in[a,b]$, $\{x_n(t)\}\subset\mathbb{R}$ 是基本列, 收敛. 设

$$x_0(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$$

在 (**1.8**)式中令 $m\to\infty$, 有

$$|x_n(t)-x_0(t)|\leq\varepsilon$$

于是, $\{x_n\}$ 一致收敛于 $x_0(t)$ 且 $x_0(t)\in \mathrm{C}[a,b]$. 同样由 (**1.8**)式知

$$\rho(x_n(t),x_0(t))=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_0(t)|\leq\varepsilon$$

即 $x_n(t)\xrightarrow{\rho}x_0(t)$.(注意在度量 ρ 意义下收敛与上面一致收敛是不一样的) □

[注记: 完备空间的闭子集是完备的.]

不完备度量空间的例子:

(1) $(\mathbb{Q},\rho),\rho(x,y)=|x-y|$ 不完备

(2) $(\mathrm{C}[a,b],\rho_1),\rho_1(x,y)=\displaystyle\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t$ 不完备, 考虑

$$f_n(t)=\begin{cases}1 & t\in\left[a,c-\dfrac{1}{n}\right]\\ -n(t-c) & t\in\left(c-\dfrac{1}{n},c+\dfrac{1}{n}\right)\\ -1 & t\in\left[c+\dfrac{1}{n},b\right]\end{cases}$$

则 $\rho_1(f_n,f_m)\leq\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\to0(n,m\to\infty)$, $\{f_n\}$ 是基本列, 但 $f_n\xrightarrow{L^1}f\notin\mathrm{C}[a,b]$. 由 Riesz-Fischer 定理,

$$f\xlongequal{\text{a.e.}}g=\begin{cases}1 & t\in[a,c)\\ 0 & t=c\\ -1 & t\in(c,b]\end{cases}$$

定义 1.9. 设 (X,ρ) 是度量空间, $(\overline{X},\overline{\rho})$ 是完备度量空间. 若存在映射 $\varphi: X\to\overline{X}$ 满足:
(1) φ 是等距映射
(2) $\varphi(X)$ 在 $\overline{X}$ 中稠密
称 $(\overline{X},\overline{\rho})$ 是度量空间 (X,ρ) 的 完备化空间.

定理 1.10. 任何度量空间都可以完备化

证明. 设 (X,ρ) 是度量空间, 记

$$\mathcal{X} := \{\{x_n\} \mid \{x_n\}\text{是}X\text{中的基本列}\}$$

在 $\mathcal{X}$ 上引入等价关系:

$$\{x_n\}\sim\{y_n\} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$$

得到商空间记为 $\overline{X} := \mathcal{X}/\sim = \{\xi=[x_n] \mid \{x_n\}\text{是}X\text{中的基本列}\}$
Step1. 在 $\overline{X}$ 上引入度量 $\overline{\rho}$, 对 $\forall\xi=[x_n],\eta=[y_n]\in\overline{X}$, 定义

$$\overline{\rho}(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$$

易知, $\overline{\rho}$ 的定义与 ξ,η 的代表元选取无关, 且为 $\overline{X}$ 上的度量.
Step2. 构造 (X,ρ) 到 $(\overline{X},\overline{\rho})$ 的等距, 定义 $\varphi: X\to\overline{X}, x\mapsto\xi_x$, 其中 $\xi_x = [x_n], x_n = x, \forall n$. 直接验证 φ 是等距:

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\varphi(x),\varphi(y)) &= \overline{\rho}(\xi_x,\xi_y)\\ &= \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\rho(x,y)\\ &= \rho(x,y)\end{aligned}$$

因此, 可以把 (X,ρ) 看成 $(\overline{X},\overline{\rho})$ 的子空间, 下证 $\varphi(X)$ 在 $\overline{X}$ 中稠密. $\forall\xi=[x_k]\in\overline{X}$, 取 $\xi_n=\xi_{x_n}$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\rho}(\xi_n,\xi)=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\rho(x_n,x_k)=0$$

其中后一个等号是因为 $\{x_n\}$ 是基本列. 所以 $\xi_n \xrightarrow{\overline{\rho}} \xi$.
Step3. 证明 $(\overline{X},\overline{\rho})$ 是完备的. 设 $\{\xi_n\} \subset \overline{X}$ 是基本列, 由 X 在 $\overline{X}$ 中稠密性, $\forall n, \exists \eta_n = \xi_{x_n} \in \varphi(X)$ 使得 $\overline{\rho}(\eta_n,\xi_n) < \dfrac{1}{n}$. 注意到 $x_n = \varphi^{-1}(\eta_n)$, 由

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_m) &= \overline{\rho}(\eta_m,\eta_n)\\ &\le \overline{\rho}(\eta_m,\xi_m) + \overline{\rho}(\xi_m,\xi_n) + \overline{\rho}(\xi_n,\eta_n)\\ &\le \frac{1}{m} + \overline{\rho}(\xi_m,\xi_n) + \frac{1}{n} \to 0 (m,n\to\infty)\end{aligned}$$

其中 $\overline{\rho}(\xi_m,\xi_n) \to 0$ 是因为 $\{\xi_n\} \subset \overline{X}$ 是基本列. 因此可得 $\{x_n\} \subset X$ 是基本列, 令 $\xi = [x_n]$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \overline{\rho}(\xi_n,\xi) &\le \lim_{n\to\infty} \overline{\rho}(\xi_n,\eta_n) + \lim_{n\to\infty} \overline{\rho}(\eta_n,\xi)\\ &\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \overline{\rho}(\eta_n,\xi)\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} \rho(x_n,x_k) = 0\end{aligned}$$

因此 $\xi_n \xrightarrow{\overline{\rho}} \xi$.

综上, $(\overline{X},\overline{\rho})$ 是 (X,ρ) 的完备化空间. □

[注记: 完备化空间是包含该度量空间的完备度量空间中最小的空间, 这里 "最小" 是在等距的意义下.]

例子: (1) $P[a,b] := \{p(t) \mid p(t)\text{是}[a,b]\text{上的多项式}\}$, 由 Weierstrass 定理, $P[a,b]$ 在度量 $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$ 下的完备化空间是 $(\mathrm{C}[a,b],\rho)$.
(2) 在 $\mathrm{C}[a,b]$ 上引入新的度量

$$\rho'(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)| \, \mathrm{d}t$$

则 $(\mathrm{C}[a,b],\rho')$ 完备化空间为 $L^1[a,b]$.

1.2.3 Baire 纲定理 (刻画完备化)

定义 1.11. (X,ρ) 是度量空间, $E\subset X$ 是子集. 若 $\mathring{\overline{E}}=\varnothing$, 称 E 为 疏集; 若 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n, E_n$ 为疏集, 称 E 为 第一纲集; 不是第一纲集的集合称为 第二纲集.

例子:

(1) $E=\{p_1,\cdots,p_n\}\subset(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是疏集.

(2) Cantor 集是疏集.

(3) $E=\{p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots\}\subset(X,\rho)$ 为第一纲集. 因为 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k, E_k=\{p_k\}$.

(4) E 为疏集, 则 $\overline{E}$ 也为疏集. $(\mathring{\overline{\overline{E}}}=\mathring{\overline{E}}=\varnothing)$

(5) E_1,E_2 为疏集, 则 $E_1\cup E_2$ 也是疏集.

证明. $\forall B_{r_0}(x_0)\subset X$, 由性质 (1.12)知, $\exists B_{r_1}(x_1)\subset B_{r_0}(x_0)$ 且 $\overline{B_{r_1}(x_1)}\cap\overline{E}_1=\varnothing$, 再对 $B_{r_1}(x_1)$ 使用性质 (1.12), $\exists B_r(x)\subset B_{r_1}(x_1)$ 且 $\overline{B_r(x)}\cap\overline{E}=\varnothing$. 因此,

$$\overline{B_r(x)}\cap(\overline{E}_1\cup\overline{E}_2)=\varnothing$$

所以再次使用性质(1.12)知, $E_1\cup E_2$ 为疏集. □

性质 1.12. 设 (X,ρ) 是度量空间, $E\subset X$ 是疏集 $\iff\forall B_{r_0}(x_0)\subset X,\exists B_r(x)\subset B_{r_0}(x_0)$ 使得 $\overline{B_r(x)}\cap\overline{E}=\varnothing$.

证明. $(\Longrightarrow)$ 对 $\forall B_{r_0}(x_0)\subset X, B_{r_0}(x_0)\not\subset\overline{E}$, 否则 x_0 是 $\overline{E}$ 的内点, 矛盾. 于是取 $x\in B_{r_0}(x_0)$ 且 $x\notin\overline{E}$. 注意到 $X\backslash\overline{E}$ 是开集, $\exists r_1$ 使得 $B_{r_1}(x)\subset X\backslash\overline{E}$. 取 $0<r<r_0$ 使得 $\overline{B_r(x)}\subset B_{r_0}(x_0)\cap B_{r_1}(x)\subset X\backslash\overline{E}$, 则有 $\overline{B_r(x)}\cap\overline{E}=\varnothing$.

$(\Longleftarrow)$ 对 $\forall x_0\in\overline{E},\forall r_0>0, B_{r_0}(x_0)\subset X$, 根据条件 $\exists B_r(x)\subset B_{r_0}(x_0)$ 使得 $\overline{B_r(x)}\cap\overline{E}=\varnothing$, 即 $B_{r_0}(x_0)$ 中有非 $\overline{E}$ 的点. 由 r_0 的任意性, $x_0\notin\mathring{\overline{E}}$. □

定理 1.13. Baire 纲定理: 完备度量空间是第二纲集.

证明. 反证. 假设 (X,ρ) 是完备度量空间, $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n, E_n$ 是疏集. 由性质(1.12)知 $\forall B_{r_0}(x_0)\subset X, \exists B_{r_1}(x_1)\subset B_{r_0}(x_0), r_1<1$ 使得

$$\overline{B_{r_1}(x_1)}\bigcap \overline{E}_1=\varnothing$$

对 $B_{r_1}(x)$ 用性质 (1.12), $\exists B_{r_2}(x_2)\subset B_{r_1}(x_1), r_2<\frac{1}{2}$ 使得

$$\overline{B_{r_2}(x_2)}\bigcap\bigcup_{k=1}^{2}\overline{E}_k=\varnothing$$

依此类推, $\exists B_{r_{n+1}}(x_{n+1})\subset B_{r_n}(x_n), r_{n+1}<\frac{1}{n+1}$ 使得

$$\overline{B_{r_{n+1}}(x_n)}\bigcap\bigcup_{k=1}^{n+1}\overline{E}_k=\varnothing$$

考虑点列 $\{x_n\}\subset X, \forall p\in\mathbb{N}$

$$B_{r_{n+p}}(x_{n+p})\subset B_{r_n}(x_n)$$

则 $\rho(x_{n+p},x_n)\le r_n<\frac{1}{n}$, 即 $\{x_n\}\subset X$ 是基本列, 由 X 的完备性, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X$. 在 $\rho(x_{n+p},x_n)\le r_n$ 中令 $p\to\infty$ 得

$$\rho(x,x_n)\le r_n$$

即 $x\in\overline{B_{r_n}(x_n)}, \forall n\in\mathbb{N}$. 由 $\overline{B_{r_n}(x_n)}\bigcap\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overline{E}_k=\varnothing$ 知 $x\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{E}_k$, 矛盾. □

推论 1.14. Baire 纲定理: (X,ρ) 是完备度量空间, $\{O_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 是 X 中开集族 O_n 且 O_n 在 X 中稠密, 则 $O=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n$ 在 X 中稠密.

证明. 要证 O 在 X 中稠密, 只需证明 $\forall x_0 \in X$, 对 x_0 的任意开邻域 U_0, $U_0 \cap O \neq \varnothing$. 因为 O_1 稠密, $U_0 \cap O_1 \neq \varnothing$, 可取 $x_1 \in U_0 \cap O_1, 0 < r_1 < 1$ 使得

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset U_0 \cap O_1$$

因为 O_2 稠密, 所以 $B(x_1, r_1) \cap O_2 \neq \varnothing$, 取 $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap O_2, r_2 < \dfrac{1}{2}$ 使得

$$\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap O_2$$

依此类推, 得到一列 $x_n, 0 < r_n < \dfrac{1}{n}$ 使得

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$$

(这里需要选择公理, 以及开集的有限交仍为开集.) 因为 $x_n \in B(x_m, r_m), n > m$, 所以

$$\rho(x_n, x_m) < r_m < \frac{1}{m}$$

因此 $\{x_n\}$ 是基本列, 由 X 的完备性知 $x_n \to x \in X$. $\forall n$, 由闭集的性质, $x \in \overline{B(x_n, r_n)}$. 因此, $x \in U_0, x \in O_n, \forall n$. 所以, $U_0 \cap O \neq \varnothing$. □

[注记: 定理(1.13) 和推论 (1.14)等价.]

Baire 纲定理的两种表述:

(1) 完备度量空间中每一个非空开集均是第二纲集

(2) 设 (X, ρ) 是完备度量空间, 则 X 中可数个稠密开子集的交也在 X 中稠.

是等价的.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2)　设 $\{O_n\}_{n\geq 1}$ 是 X 中可数个稠密开集, 则

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n} = X \Leftrightarrow \varnothing = \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n}\right)^c = \left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right)^c\right)^\circ = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c\right)^\circ$$

反证法, 若 $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n} \neq X$, 则 $\exists x_0 \in X$, 使得 $x_0 \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c\right)^\circ$, 即 $\exists r_0 > 0$, 使得 $B(x_0, r_0) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c$, 故

$$B(x_0, r_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(B(x_0, r_0) \cap O_n^c\right) \tag{1.15}$$

注意到 $\overline{O_n}=X$, 有 $\mathring{\overline{O_n^c}}=\left(\mathring{\overline{O_n}}\right)^c=\left(\overline{O_n}\right)^c=X^c=\varnothing$, 即 O_n^c 是疏集, 从而 $B(x_0,r_0)\cap O_n^c$ 是疏集, 由 (**1.15**)知 $B(x_0,r_0)$ 是第一纲集, 矛盾于假设 $B(x_0,r_0)$ 是第二纲集.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 反证, 若非空开集 $U\subset X$ 是第一纲集, 则存在 X 中的疏集 $\{E_n\}_{n\geq 1}$ 使得 $U=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 由 E_n 是疏集知 $\mathring{\overline{E_n}}=\varnothing$, 因此 $\overline{\left(\overline{E_n}\right)^c}=X$, 即 $\left(\overline{E_n}\right)^c$ 是 X 中的稠密开集, 但是

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{E_n}\right)^c}=\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{E_n}\right)^c}\subset\overline{U^c}=U^c\neq X$$

与 (2) 中结论 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\overline{E_n}\right)^c$ 应在 X 中稠密矛盾. □

[注记: 内部和补集的运算: $A^\circ=\left(\overline{A^c}\right)^c$, 即 $(A^\circ)^c=\overline{A^c}$.]

1.3 压缩映射定理

本节主要介绍压缩映射定理及相关应用.

1.3.1 压缩映射定理

定义 1.16. (X,ρ) 是度量空间, $\varphi:X\to X$. 若 $\exists\alpha\in(0,1)$ 使得

$$\rho(\varphi(x),\varphi(y))\leq\alpha\rho(x,y),\forall x,y\in X$$

称 φ 是 X 上的一个 压缩映射.

[注记: 压缩映射是连续映射.]

定理 1.17. (Banach)设 (X,ρ) 是完备度量空间, φ 是 X 上的一个压缩映射, 则 φ 有唯一的不动点. 即存在唯一 $x\in X$, 使得 $\varphi(x)=x$.

证明. 任取 $x_0 \in X$, 记 $x_n = \varphi^n(x_0) = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n个}(x_0)$, 即

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \alpha^n \rho(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{1.18}$$

那么对 $\forall p \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=1}^{p} \rho(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \quad (三角不等式) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \alpha^{n+k-1} \rho(x_1, x_0) \quad (利用(\mathbf{1.18})) \\ &= \alpha^n \rho(x_1, x_0) \sum_{k=1}^{p} \alpha^{k-1} \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0) \end{aligned}$$

因此, $\{x_n\} \subset X$ 是基本列, 由 X 的完备性, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 在 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 中令 $n \to \infty$(压缩映射是连续的), 则 $x = \varphi(x)$, 即 x 是 φ 的不动点.

下面证明唯一性, 假设 $x, y \in X$ 使得 $\varphi(x) = x, \varphi(y) = y$. 则

$$\rho(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$$

注意 $\alpha \in (0, 1)$, 则 $\rho(x, y) = 0$, 即 $x = y$. □

1.3.2 应用

例 1: 常微分方程解的存在唯一性. 设 $f(t, x)$ 是 $D = [-h, h] \times [\xi - \delta, \xi + \delta] \subset \mathbb{R}^2$ 上的连续函数,f 对变元 x 关于 t 一致地满足局部 Lipschitz 条件:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \cdot |x - y|$$

其中 $L>0$ 为常数, 考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t,x(t)) \\ x(0)=\xi \end{cases} \tag{1.19}$$

定理 1.20. 记 $M=\max\limits_{(t,x)\in D}|f(t,x)|$. 当 $h<\min\left\{\dfrac{\delta}{M},\dfrac{1}{L}\right\}$ 时, 方程 (1.19)有唯一的解.

证明. 想法: 找一个合适的完备度量空间, 将原问题转化为压缩映射的不动点问题.

注意到方程 (1.19)等价于积分方程

$$x(t)=\xi+\int_0^t f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{1.21}$$

为此, 考虑映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{C}[-h,h] &\to \mathrm{C}[-h,h] \\ x(t) &\mapsto \varphi(x) := \xi + \int_0^t f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

取 $X := \{x\in \mathrm{C}[-h,h] \mid x(0)=\xi, \rho(x,\xi)=\max\limits_{t\in[-h,h]}|x(t)-\xi| \le \delta\}$, 则 $X\subset \mathrm{C}[-h,h]$ 为闭子集, 从而 (X,ρ) 是完备的.

Step1. 先证 $\varphi(X)\subset X$, 对 $\forall x(t)\in X$,

$$\begin{aligned} |\varphi(x)-\xi| &= \left|\int_0^t f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &\le \int_0^t |f(\tau,x(\tau))|\,\mathrm{d}\tau \\ &\le M\int_0^t \mathrm{d}\tau \le Mh \le \delta \end{aligned}$$

即 $\rho(\varphi(x),\xi)\le\delta$ 或 $\varphi(x)\in X$.

Step2. 再证 φ 是 X 上的压缩映射, 对 $\forall x(t), y(t) \in X$,

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)-\varphi(y)| &= \left|\int_0^t (f(\tau,x(\tau))-f(\tau,y(\tau))\,\mathrm{d}\tau)\right| \\
&\le \int_0^t |f(\tau,x(\tau))-f(\tau,y(\tau))\,\mathrm{d}\tau|\ \mathrm{d}\tau \\
&\le L\int_0^t |x(\tau)-y(\tau)|\ \mathrm{d}\tau \quad \text{(Lipschitz)} \\
&\le L\rho(x,y)\int_0^t \mathrm{d}\tau \\
&\le Lh\rho(x,y)
\end{aligned}
$$

左边关于 t 在 $[-h,h]$ 上取最大值有

$$
\rho(\varphi(x),\varphi(y)) \le Lh\rho(x,y)
$$

即当 $h<\min\left\{\dfrac{\delta}{M},\dfrac{1}{L}\right\}$ 时, φ 是 $X=\{x(t)\in \mathrm{C}[-h,h]\mid x(0)=\xi,\rho(x,\xi)\le\delta\}$ 上的压缩映射. 根据压缩映射定理, 存在唯一 $x(t)\in X$ 使得 $x(t)$ 满足方程 (**1.21**)和 (**1.19**). □

例 2: 隐函数存在定理

定理 1.22. 设 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m, (x,y)\mapsto f(x,y), U\times V\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 为开集. $(x_0,y_0)\in U\times V$, 设有

(1) $f(x_0,y_0)=0$

(2) $\det\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\neq 0$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $U\times V$ 连续

则存在 (x_0,y_0) 的一个开邻域 $U_0\times V_0\subset U\times V$ 及唯一连续函数 $\varphi:U_0\to V_0, x\mapsto\varphi(x)$ 使得 $\forall x\in U_0$

(1) $f(x,\varphi(x))=0$

(2) $\varphi(x_0)=y_0$

证明. 令 $\mathrm{C}(\overline{B_r(x_0)},\mathbb{R}^m):=\{u:\overline{B_r(x_0)}\to\mathbb{R}^m\mid u\text{连续}\}$, 在 $\mathrm{C}(\overline{B_r(x_0)},\mathbb{R}^m)$ 上引

入度量, 对 $\forall u,v\in \mathrm{C}(\overline{B_r(x_0)},\mathbb{R}^m)$ 定义

$$\rho(u,v):=\max_{\substack{x\in\overline{B_r(x_0)}\\1\le k\le m}}|u_k(x)-v_k(x)|$$

容易验证 $(\mathrm{C}(\overline{B_r(x_0)},\mathbb{R}^m),\rho)$ 是完备度量空间. 为了方便起见, 假设 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=I_m$. 构造映射

$$\begin{aligned} T:\mathrm{C}(\overline{B_r(x_0)},\mathbb{R}^m)&\ \to\ \mathrm{C}(\overline{B_r(x_0)},\mathbb{R}^m)\\ u(x)&\ \mapsto\ Tu:=u(x)-f(x,u(x)) \end{aligned}$$

于是, 对 $\forall u,v\in \mathrm{C}(\overline{B_r(x_0)},\mathbb{R}^m)$ 有

$$\begin{aligned}(Tu-Tv)_k&=(u(x)-v(x))_k-(f_k(x,u(x))-f_k(x,v(x)))\\ &=(u_k(x)-v_k(x))-\sum_{j=1}^m\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x,\hat{y}_k(x))(u_j(x)-v_j(x))\\ &=\sum_{j=1}^m\left(\delta_{jk}-\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x,\hat{y}_k(x))\right)(u_j(x)-v_j(x))\end{aligned}\tag{1.23}$$

其中 $\hat{y}_k(x)=\theta_k u(x)+(1-\theta)_k v(x), 0\le\theta_k\le 1$. 注意到 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=I_m$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $U\times V$ 上连续, $\exists\delta>0$ 使得当 $(x,y)\in\overline{B_\delta(x_0)}\times\overline{B_\delta(y_0)}$ 时有

$$\left|\delta_{jk}-\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x,y)\right|\le\frac{1}{2m}$$

因此, 根据估计式 (**1.23**), 当 $r<\delta$ 时

$$|(Tu-Tv)_k|\le\sum_{j=1}^m\frac{1}{2m}|u_j(x)-v_j(x)|\le\frac{1}{2}\rho(u,v)$$

所以左边取最大值得

$$\rho(Tu,Tv)\le\frac{1}{2}\rho(u,v)\tag{1.24}$$

即 T 为压缩映射. 另一方面, 由 f 的连续性及 $f(x_0,y_0)=0$, $\exists\eta>0$, 当 $\eta<\min\{\delta,r\}, x\in\overline{B_\eta(x_0)}$ 时,

$$\max_{\substack{x\in\overline{B_\eta(x_0)}\\1\le i\le m}}|f_i(x,y_0)|\le\frac{\delta}{2}$$

于是,

$$\begin{aligned} \rho(Tu,y_0) &\le \rho(Tu,Ty_0)+\rho(Ty_0,y_0) \\ &\le \rho(Tu,Ty_0)+\max_{\substack{x\in \overline{B_\eta(x_0)} \\ 1\le i\le m}} |f_i(x,y_0)| \\ &\le \frac{1}{2}\rho(u,y_0)+\frac{\delta}{2}\le\delta \end{aligned} \tag{1.25}$$

综上, 取 $X=\{u\in \mathrm{C}(\overline{B_\eta(x_0)},\mathbb{R}^m)\mid u(x_0)=y_0,u(x)\in\overline{B_\delta(y_0)}\}$, 可知 X 在 ρ 下是完备的, 由 (**1.24**)知 T 为压缩映射, 由 (**1.25**)知 $TX\subset X$. 根据压缩映射定理, 结论成立. □

1.4 度量空间中的紧性

主要介绍度量空间中集合的几类紧性及其相互关系, 具体有: (自) 列紧集, 紧集, 完全有界集.

1.4.1 列紧集

回顾: $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 中有界点列一定有收敛的子列, 但在一般的度量空间中不成立, 如:

例 (1) $(\mathrm{C}[0,1],\rho),\{x_n\}\subset \mathrm{C}[0,1]$

$$x_n(t)=\begin{cases}0 & \dfrac{1}{n}<t\le 1\\ 1-nt & 0\le t<\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

$$\rho(x_n(t),0)=\max_{t\in[0,1]}|x_n(t)|=1$$

$\{x_n(t)\}\subset(\mathrm{C}[0,1],\rho)$ 有界, 又对 $\forall p\in\mathbb{N}$, 有

$$|x_{n+p}(t)-x_n(t)|=\begin{cases}0 & \dfrac{1}{n}\le t\le 1\\ 1-nt & \dfrac{1}{n+p}\le t\le\dfrac{1}{n}\\ pt & 0\le t<\dfrac{1}{n+p}\end{cases}$$

$$\rho(x_{n+p}(t),x_n(t))=\frac{p}{n+p}$$

所以 $\{x_n(t)\}$ 中无子列是基本列, 即 $\{x_n\}$ 中无收敛的子列.

例 (2) $\ell^2 := \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$, 对 $\forall x, y \in \ell^2$,

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

易证 (ℓ^2, ρ) 是完备的.

$$e_n = (0, \cdots, 0, 1(\text{第}n\text{个}), 0, \cdots) \in \ell^2$$

对 $\forall n \neq m, \rho(e_n, e_m) = \sqrt{2} > 0$, 于是

$$M := \{e_n \mid n = 1, 2, \cdots\} \subset \ell^2$$

是有界子集, 但 M 中无收敛的子列.

定义 1.26. (X, ρ) 是度量空间, $A \subset X$ 是子集, 若 A 中任意点列有收敛的子列, 称 A 是 列紧的; 若 A 中任意点列有收敛到 A 中的子列, 称 A 是 自列紧的. 若 X 是列紧的, 称 X 是 列紧空间.

[注记:(1) $\mathbb{R}^n$ 中列紧集 $\Longleftrightarrow$ 有界集; 自列紧 $\Longleftrightarrow$ 有界闭集. (2) 自列紧集一定是闭集 (3) 列紧空间一定是完备的.]

定义 1.27. (X, ρ) 是度量空间, $N \subset M \subset X$, $\varepsilon > 0$, 若 $\forall x \in M$, $\exists y \in N$ 使得 $x \in B_\varepsilon(y)$, 称 N 是 M 的一个 ε-网; 若 N 中只有有限个元素, 称 N 是 M 的一个 有穷的 ε-网; 若 $\forall \varepsilon > 0$, M 有有穷的 ε-网, 称 M 是 完全有界的.

[注记: (1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 ε-网; (2) 完全有界集是有界集;(3) 完全有界这一概念非常实用, 指出了具体逼近方式.]

定理 1.28. (Hausdorff). 度量空间中, $M \subset X$ 是列紧集, 则 M 是完全有界的; 反过来, 若 $M \subset X$ 是完全有界的, 且空间 X 完备, 则 M 是列紧集.

证明. ($\Longrightarrow$) (反证) 设 M 是 (X,ρ) 中的列紧集, 若 M 不是完全有界的, 则 $\exists\varepsilon>0,\forall x_1\in M,\exists x_2\in M$ 使得 $x_2\notin B_\varepsilon(x_1)$, 对 $\bigcup\limits_{k=1}^{2}B_\varepsilon(x_k),\exists x_3\in M$ 使得 $x_3\notin\bigcup\limits_{k=1}^{2}B_\varepsilon(x_k)$, 依此类推得到点列 $\{x_n\}\subset M$ 使得 $x_{n+1}\notin\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_\varepsilon(x_k)$. 于是, 对 $\forall k\neq l$ 有 $\rho(x_k,x_l)\geq\varepsilon$, 即 $\{x_k\}$ 中无收敛子列, 矛盾.

($\Longleftarrow$) (对角线方法) 设 M 是完备空间 (X,ρ) 中的完全有界集, 下证 M 中任意点列 $\{x_n\}$ 有收敛子列. 对 M 的有穷 1-网 $N_1=\{y_{1,1},y_{1,2},\cdots,y_{1,k_1}\}$ 使得

$$M\subset\bigcup_{l=1}^{k_1}B_1(y_{1,l})$$

$\exists y_1\in N_1$ 及 $\{x_n\}$ 中的子列 $\{x_{1,k}\}\subset B_1(y_1)$. 对 M 的有穷 $\dfrac{1}{2}$-网, $\exists y_2\in N_2$ 及 $\{x_{1,k}\}$ 的子列 $\{x_{2,k}\}$ 使得 $\{x_{2,k}\}\subset B_{\frac{1}{2}}(y_2)$. 同理, 对 M 的有穷 $\dfrac{1}{n}$-网, $\exists y_n\in N_n$ 及 $\{x_{n-1,k}\}$ 的子列 $\{x_{n,k}\}$ 使得 $\{x_{n,k}\}\subset B_{\frac{1}{n}}(y_n)$. 记 $z_k:=x_{k,k}$, 则 $\{z_k\}\subset\{x_n\}$, 对 $\forall p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\rho(z_{k+p},z_k)&=\rho(x_{k+p,k+p},x_{k,k})\\&\leq\rho(x_{k+p,k+p},y_k)+\rho(y_k,x_{k,k})\\&\leq\frac{2}{k}\end{aligned}$$

即 $\{z_k\}$ 是基本列, 由 (X,ρ) 的完备性, $\{z_k\}$ 收敛. □

1.4.2 紧集

定义 1.29. (X,ρ) 是度量空间, $M\subset X$. 若 M 的任意开覆盖有有限子覆盖, 称 M 是紧集.

性质 1.30. 紧集一定是闭集.

证明. (X,ρ) 是度量空间, $M\subset X$ 是紧集, 要证 M 是闭集, 当且仅当 $X\backslash M$ 是开

集. 对 $\forall x_0 \in X\backslash M$, 注意到

$$M \subset \bigcup_{x\in M} B_{\frac{\rho(x,x_0)}{2}}(x)$$

由 M 的紧性知, $\exists x_1,\cdots,x_n \in M$ 使得

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(x_0,x_k)}{2}}(x_k)$$

记 $\delta := \min\limits_{1\le k\le n}\left\{\dfrac{\rho(x_k,x_0)}{3}\right\}$, 对 $\forall x \in B_\delta(x_0)$ 有

$$\begin{aligned}\rho(x,x_k) &\ge \rho(x_k,x_0)-\rho(x_0,x)\\ &> \frac{\rho(x_k,x_0)}{2}\end{aligned}$$

即 $x \notin B_{\frac{\rho(x_k,x_0)}{2}}(x_k), B_\delta(x_0)\subset X\backslash M$. 于是, $X\backslash M$ 开, M 闭. □

定理 1.31. (X,ρ) 是度量空间, $M\subset X$ 是紧集 $\Longleftrightarrow$ M 自列紧.

证明. $(\Longrightarrow)$　(反证) 设 $M\subset(X,\rho)$ 紧, $\{x_n\}\subset M$. 假设 $\{x_n\}$ 中的点不重复且无收敛子列. 构造

$$O_n = \{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_{n+1},\cdots\}$$

则 $O_n\subset X$ 闭, $X\backslash O_n$ 开, 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\backslash O_n) = X \supset M$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n$ 是 M 的开覆盖, 由 M 的紧性, $\exists n_1,\cdots,n_m\in\mathbb{N}$ 使得 $M\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}(X\backslash O_{n_k})$
记 $N := \max\limits_{1\le k\le m}\{n_k\}$, 则

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{N}(X\backslash O_k) = X\backslash\{x_{N+1},x_{N+2},\cdots\}$$

与 $\{x_n\} \subset M$ 矛盾.

$(\Longleftarrow)$ (反证) 设 $M \subset (X,\rho)$ 自列紧, 假设 M 的开覆盖 $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 无有限子覆盖. 由 M 的列紧性, M 完全有界. 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ 有穷的 $\frac{1}{n}$-网 $N_n := \{x_{n,1}, \cdots, x_{n,k_n}\}$ 使得

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_{\frac{1}{n}}(x_{n,i})$$

则 $\exists y_n \in N_n$ 使得 $B_{\frac{1}{n}}(y_n)$ 不能被有限 U_α 覆盖. 由 M 的自列紧性, $\{y_n\} \subset M$ 有收敛子列, 仍记为 $\{y_n\}$, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \in M$. 于是 $\exists \alpha_0$ 使得 $y_0 \in U_{\alpha_0}$, 注意到 $U_{\alpha_0} \subset X$ 开, $\exists \delta > 0$ 使得 $B_\delta(y_0) \subset U_{\alpha_0}$. 对于充分大的 n 满足 $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$, 且 $\rho(y_n, y_0) < \frac{\delta}{2}$, 对 $\forall x \in B_{\frac{1}{n}}(y_n)$

$$\rho(x, y_0) \leq \rho(x, y_n) + \rho(y_n, y_0) < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

所以 $B_{\frac{1}{n}}(y_n) \subset B_\delta(y_0) \subset U_{\alpha_0}$, 与 $B_{\frac{1}{n}}(y_n)$ 不能由有限个 U_α 覆盖矛盾. □

1.5 紧集上的连续函数空间

主要介绍紧集上连续函数空间中列紧集的等价刻画. 即 Arzela-Ascoli 定理.

设 (X,ρ) 为度量空间, $M \subset X$ 为紧集,

$$\mathrm{C}(M) := \{u \mid u\text{是}M\text{上的连续函数}\}$$

对 $\forall u, v \in \mathrm{C}(M)$, 定义

$$\rho(u,v) := \max_{x \in M} |u(x) - v(x)|$$

性质 1.32. ρ 的定义是合理的, 即上述最大值能够取到.

证明. 只要证 $\forall \omega \in \mathrm{C}(M)$, ω 在 M 上最大值能够取到. 先证 $\omega(M) \subset \mathbb{R}$ 是紧集, 对 $\omega(M)$ 的任意开覆盖 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{O}_\alpha$, 由 ω 的连续性, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \omega^{-1}(\mathcal{O}_\alpha)$ 是 M 的开覆盖. 则

根据 M 的紧性,$\exists\omega^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha_1}),\cdots,\omega^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha_m})$ 是 M 的有限开覆盖, 即

$$M\subset\bigcup_{k=1}^{m}\omega^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha_k})$$

于是, $\omega(M)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}\mathcal{O}_{\alpha_k}$, 为 $\omega(M)$ 的有限开覆盖. 于是 $\omega(M)\subset\mathbb{R}$ 紧, 注意到 $\mathbb{R}$ 上紧集为有界闭集, 有最大值 a 和最小值 b, 取 $x\in\omega^{-1}(a)$ 或 $x\in\omega^{-1}(b)$, 则 $\omega(x)=a$ 或 b. □

[注记: (1) $(\mathrm{C}(M),\rho)$ 是完备度量空间;(2) $\forall u\in\mathrm{C}(M),u$ 是一致连续的.]

定义 1.33. (X,d) 是度量空间,$F\subset\mathrm{C}(M)$ 子集, 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$, 对 $\forall x,y\in M$, 当 $d(x,y)<\delta$, 对 $\forall\varphi\in F$ 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$, 称 F *等度连续*. 若存在常数 $K>0$, 使得 $\forall x\in M,\varphi\in F$ 有 $|\varphi(x)|<K$, 称 F*一致有界*.

定理 1.34. Arzela – Ascoli 定理: (X,d) 是度量空间, $M\subset X$ 紧, 子集 $F\subset\mathrm{C}(M)$ 是列紧的 $\Longleftrightarrow$ F 一致有界且等度连续.

证明. ($\Longrightarrow$) Step1. F 是列紧的, 则 F 是完全有界的, 一定是有界集. 即 $\exists K>0$, 使得对 $\forall\varphi\in F$, $\rho(\varphi,0)=\max\limits_{x\in M}|\varphi(x)|<K$. 即 F 一致有界.

Step2. 证明 F 等度连续. $\forall\varepsilon>0$, 由 F 的完全有界性, F 存在有穷的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$, 即 $F\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_{\frac{\varepsilon}{3}}(\varphi_k)$. 由 $\mathrm{C}(M)$ 中元素都是 M 上一致连续函数, 对上述有限 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得当 $d(x,y)<\delta$ 时,

$$|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|<\frac{\varepsilon}{3},\forall 1\le i\le n$$

于是, $\forall\varphi\in F,\exists\varphi_{i_0}$ 使得 $\rho(\varphi,\varphi_{i_0})<\frac{\varepsilon}{3}$, 从而当 $d(x,y)<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)|&\le|\varphi(x)-\varphi_{i_0}(x)|+|\varphi_{i_0}(x)-\varphi_{i_0}(y)|+|\varphi_{i_0}(y)-\varphi(y)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

即 F 是等度连续的.

$(\Longleftarrow)$ 注意到 $(\mathrm{C}(M),\rho)$ 是完备的, 只要证明 F 是完全有界的. 由 F 的等度连续性, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $d(x,y)<\delta$ 时, 对 $\forall\varphi\in F$ 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 又 $M\subset X$ 是紧集, 对上述 δ, M 存在有穷 δ-网 $N_\delta:=\{x_1,\cdots,x_m\}$, 作映射如下:

$$T:F\to\mathbb{R}^m,\varphi\mapsto(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_m))$$

由于 F 一致有界, $\exists K>0$ 使得对 $\forall x\in M,\varphi\in F$ 有 $|\varphi(x)|\le K$

$$\left(\sum_{i=1}^m|\varphi(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{m}K$$

即 $T(F)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中有界集 (关于标准距离 ρ_0), 从而是 $\mathbb{R}^m$ 中完全有界集, 从而存在有限的 $\dfrac{\varepsilon}{3}$-网

$$\widetilde{N}_{\frac{\varepsilon}{3}}=\{T\varphi_1,\cdots,T\varphi_l\}$$

于是, 对 $\forall\varphi\in F,\exists\varphi_{i_0}$ 使得 $\rho_0(T\varphi,T\varphi_{i_0})<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 对 $\forall x\in M,\exists x_r\in N_\delta$ 使得 $d(x,x_r)<\delta$, 那么有:

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi_{i_0}(x)|&\le|\varphi(x)-\varphi(x_r)|+|\varphi(x_r)-\varphi_{i_0}(x_r)|+|\varphi_{i_0}(x_r)-\varphi_{i_0}(x)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\rho_0(T\varphi,T\varphi_{i_0})+\frac{\varepsilon}{3}\\&\le\varepsilon\end{aligned}$$

对上式两边关于 x 取最大值

$$\rho(\varphi,\varphi_{i_0})<\varepsilon$$

即 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_l\}$ 是 F 的有穷 ε-网, 从而 F 是完全有界的. □

例: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开凸集, C_1,C_2 是两个给定的正数

$$F:=\{u\in\mathrm{C}^{(1)}(\overline{\Omega})\mid|u(x)|\le C_1,|\nabla u(x)|\le C_2,\forall x\in\Omega\}$$

则 $F\subset\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ 列紧.

证明. 显然 F 是一致有界的, 对 $\forall x,y\in\overline{\Omega}$,

$$|u(x)-u(y)|=|\nabla u(x_\theta)(x-y)|\le C_2\,|x-y|$$

其中 $x_\theta=\theta x+(1-\theta)y,0\le\theta\le1$, 因此 F 等度连续. □

2　赋范空间

主要介绍赋范空间的基本概念, 赋范空间之间有界线性算子的性质, 有开映射定理, 闭图像定理, 共鸣定理.

2.1　赋范空间

介绍赋范空间的定义, 有限维赋范空间的刻画及商空间.

2.1.1　赋范空间

定义 2.1. X 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 其中 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$. 若函数 $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ 满足:
(1) 正定性: $\|x\|\geq 0, \|x\|=0 \Longleftrightarrow x=0$
(2) 三角不等式: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|, \forall x,y\in X$
(3) 齐次性: 对 $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$
称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个 范数. 此时, $(X,\|\cdot\|)$ 称为一个 赋范空间. 给定赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 可以诱导出 X 上的一个度量: $\rho(x,y):=\|x-y\|, \forall x,y\in X$ 若 (X,ρ) 是完备的, 称 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

[注记: 若定义中正定性条件 (1) 改为"$\|x\|\geq 0,\forall x\in X$", 称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的一个 半范数, 通常记为 $p(\cdot)$.]

例 (1) $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是测度空间, $p\geq 1$

$$L^p(\Omega)=\{u\mid u\text{是}\Omega\text{上可测函数}, |u|^p\text{ 可积}\}$$

$\forall u\in L^p(\Omega), \|u\|_{L^p}:=\left(\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, 则 $(L^p(\Omega),\|\cdot\|_{L^p})$ 是 Banach 空间.

(2)$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是测度空间,Ω 是 σ-有限的.

$$L^\infty(\Omega):=\{u\mid u\text{是}\Omega\text{上本性有界的可测函数}\}$$

对 $\forall u\in L^\infty(\Omega)$, 定义

$$\|u\|_{L^\infty}:=\inf_{E\subset\Omega,\mu(E)=0}\ \sup_{x\in\Omega\setminus E}|u(x)|$$

则 $(L^\infty(\Omega),\|\cdot\|_{L^\infty})$ 是 Banach 空间.

(3) $\ell^p := \left\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\middle| \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}, p\geq 1$, 可在 ℓ^p 上定义

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $(\ell^p,\|\cdot\|_{\ell^p})$ 是 Banach 空间.

(4) $\ell^\infty := \{\{x_k\}\mid \{x_k\}\text{是有界列}\}$, 在 ℓ^∞ 上引入

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\geq 1}|x_k|$$

则 $(\ell^\infty,\|\cdot\|_{\ell^\infty})$ 是 Banach 空间.

(5) $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开区域.

$$\mathrm{C}^k(\overline{\Omega}) := \{u\mid u\text{在}\overline{\Omega}\text{上有}k\text{阶连续偏导数}\}$$

对 $\forall u\in \mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$, 定义

$$\|u\|_{\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|\leq k, x\in\overline{\Omega}}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}u(x)\right|$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k, \partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, 则 $(\mathrm{C}^k(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})})$ 是 Banach 空间.

(6) $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开区域, $\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$ 与 (5) 相同, $k\in\mathbb{N}, 1\leq p<+\infty$, $\forall u\in\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$, 定义

$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega|\partial^\alpha u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $(\mathrm{C}^k(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{k,p})$ 是赋范空间, 但不是 Banach 空间. 记 $\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$ 中的子集

$$S := \{u\mid u\in\mathrm{C}^k(\overline{\Omega}), \|u\|_{k,p}<\infty\}$$

S 在上述范数诱导度量下为完备化空间, 记为 $W^{k,p}(\Omega)$ 或 $H^{k,p}(\Omega)$, 称为 Sobolev 空间.

2.1.2 有限维赋范空间

定义 2.2. 设 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数. 若存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得对 $\forall x \in X$ 有

$$C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$$

称 X 上范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 等价, 记为 $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

[注记: 线性空间上两个等价范数所诱导的拓扑 (开集) 是一致的. 所描述的收敛性也是一致的.]

定理 2.3. 有限维赋范空间上任何两个范数都等价.

证明. $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $\dim X = n < +\infty$. 取 X 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 则 $\forall x \in X, x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$. 令

$$\|x\|_0 := \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|\cdot\|_0$ 是 X 上另一个范数. 作映射

$$p : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$

由三角不等式有

$$\begin{aligned}
|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)e_i\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left|x^i - y^i\right| \cdot \|e_i\| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x^i - y^i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Cauchy} - \text{Schwarz}) \\
&= \|x - y\|_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

因此可知, $p(x)$ 在 $(X,\|\cdot\|_0)$ 上一致连续. 注意到单位球面 $S:=\{\xi\in X\mid \|\xi\|_0=1\}\subset(X,\|\cdot\|_0)$ 是紧集. 把 $p(x)$ 限制到 S 上, 记 $p(x)$ 在 S 上最大值为 C_2, 最小值为 C_1. 则

$$C_1\le p(\xi)\le C_2,\forall\xi\in S$$

易知, $C_1>0$. 否则若 $C_1=0$, 由 S 的紧性, $\exists\xi\in S$ 使得 $\|\xi\|=p(\xi)=C_1=0$, 即 $\xi=0$, 与 $\xi\in S$ 矛盾. 于是对 $\forall x\in X\backslash\{0\}$, $\xi=\dfrac{x}{\|x\|_0}\in S$, 因此

$$0<C_1\le p\left(\frac{x}{\|x\|_0}\right)\le C_2$$

即

$$C_1\|x\|_0\le\|x\|\le C_2\|x\|_0$$

即 $\|\cdot\|\sim\|\cdot\|_0$, 由范数等价的传递性, X 上任何两个范数是等价的. □

[注记: 定理说明有限维赋范空间都是 Banach 空间.]

推论 2.4. 最佳逼近: $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_0\subset X$ 为子空间, $\dim X_0<+\infty$, 对 $\forall y\in X$, 存在 $x_0\in X_0$ 使得

$$\|y-x_0\|=\inf_{x\in X_0}\|y-x\|$$

证明. 不妨设 $y\in X\backslash X_0$, 否则取 $x_0=y$ 即可. 令 $\varphi_y:X_0\to\mathbb{R},x\mapsto\varphi_y(x)=\|y-x\|$, 则有 $\forall x_1,x_2\in X$ 有

$$|\varphi_y(x_1)-\varphi_y(x_2)|\le|\|y-x_1\|-\|y-x_2\||\le\|x_1-x_2\|$$

于是, φ_y 是 X_0 上的一致连续函数. 注意到 X_0 是闭的, 则 $d:=\inf\limits_{x\in X_0}\|y-x\|>0$. 由下确界的定义, 对 $\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in X_0$ 使得

$$d\le\|y-x_n\|\le d+\frac{1}{n}$$

于是 $\{x_n\}\subset X_0$ 是有界列, 由于 $\dim X_0<+\infty$, 存在收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in X_0$. 由于 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$d\le\varphi_y(x_{n_k})\le d+\frac{1}{n_k}$$

令 $k \to \infty$, 得到 $\varphi_y(x_0) = \|y - x_0\| = d$. □

定理 2.5. $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $\dim X < +\infty \iff X$ 中的单位球面是列紧的.

证明. $(\Longrightarrow)$　显然.

$(\Longleftarrow)$　(反证) 假设 $\dim X = +\infty$, 记 $S := \{x \mid \|x\| = 1\}$ 为 X 的单位球面, 任取 $x_1 \in S$, 令 $X_1 = \mathrm{Span}\{x_1\}$, 对 $\forall y \in X \backslash X_1$, 由推论(2.4)知, $\exists x \in X_1$ 使得

$$d := \|y - x\| = \inf_{z \in X_1} \|y - z\| > 0$$

记 $x_2 = \dfrac{y - x}{d} \in S$, 则

$$\|x_2 - x_1\| = \left\|\frac{1}{d}(y - x) - x_1\right\| = \frac{1}{d}\|y - (x + dx_1)\| \geq \frac{1}{d} \cdot d = 1$$

由假设知 X 是无穷维的, 重复上述过程依次取 $X_2 = \mathrm{Span}\{x_1, x_2\}$, $X_3 = \mathrm{Span}\{x_1, x_2, x_3\}, \cdots$, 可得到点列 $\{x_n\} \subset S$, 满足

$$\|x_n - x_i\| \geq 1, 1 \leq i \leq n - 1$$

从而有界列 $\{x_n\}$ 无收敛的子列, 与 S 列紧性矛盾. □

定理 2.6. Riesz 引理: $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_0 \subset X$ 闭子空间, 则对 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists y \in X \backslash X_0$ 使得

(1) $\|y\| = 1$

(2) $\|y - x\| \geq 1 - \varepsilon, \forall x \in X_0$

证明. 任取 $z \in X \backslash X_0$, 记 $d := \inf\limits_{x \in X_0} \|z - x\| > 0$. 由 X_0 是闭子空间知 $d > 0$, 由下确界的定义, $\forall \delta > 0$, $\exists x_0 \in X_0$ 使得

$$d \leq \|z - x_0\| \leq d + \delta$$

令 $y = \dfrac{z - x_0}{\|z - x_0\|}$, 则 $\|y\| = 1$. 于是, $\forall x \in X_0$ 有

$$\begin{aligned}\|y - x\| &= \frac{1}{\|z - x_0\|}\|z - (x_0 + \|z - x_0\|x)\| \\ &\geq \frac{d}{\|z - x_0\|} \geq \frac{d}{d + \delta} := 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

取 $\delta = \dfrac{d}{1 - \varepsilon} - d$ 即可. □

2.1.3　商空间

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_0 \subset X$ 闭子空间. 在 X 上引入等价关系

$$x \sim x' \iff x - x' \in X_0$$

对 $\forall x \in X$, 所在的等价类记为 $[x]$. 则得到商空间

$$X/X_0 := \{[x] \mid x \in X\}$$

在 X/X_0 上引入:
1. 加法: $[x] + [y] := [x + y]$
2. 数乘: $\lambda \cdot [x] := [\lambda x]$
易知, 上述加法, 数乘定义不依赖代表元的选取, 从而使得 X/X_0 成为线性空间.

定理 2.7. *在 X/X_0 上引入 $\|[x]\|_0 := \inf\limits_{y \in [x]} \|y\|$, 则*
(1) $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 是赋范空间
(2) 若 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 是 Banach 空间.

证明. (1) 只需验证 $\|\cdot\|_0$ 是范数.
(i) 正定性: 显然对 $\forall [x] \in X/X_0$ 有 $\|[x]\|_0 \geq 0$. 若 $\|[x]\|_0 = 0$, 于是 $\exists y_n \in [x]$ 使得 $\|y_n\| \to 0$. 由于 $x - y_n \in X_0$ 及 X_0 闭知 $x = \lim\limits_{n \to \infty} x - y_n \in X_0$, 故 $[x] = [0]$.
(ii) 三角不等式: 对 $\forall [x], [y] \in X/X_0$, 取 $x_n \in [x], y_n \in [y]$ 使得 $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \|[x]\|_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \|y_n\| = \|[y]\|_0$. 注意到 $x_n + y_n \in [x] + [y] = [x + y]$, 有

$$\|[x + y]\|_0 \leq \|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\|$$

令 $n\to\infty$ 有

$$\|[x+y]\|_0\le\|[x]\|_0+\|[y]\|_0$$

(iii) 齐次性: 对 $\forall\lambda\in\mathbb{K},[x]\in X/X_0$, $\|\lambda[x]\|_0=\|[\lambda x]\|_0=\inf\limits_{y\in[\lambda x]}\|y\|=\inf\limits_{y'\in[x]}\|\lambda y'\|=|\lambda|\cdot\inf\limits_{y'\in[x]}\|y'\|=|\lambda|\cdot\|[x]\|_0$

(2) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是完备的, 下证 $(X/X_0,\|\cdot\|_0)$ 是完备的. 任给基本列 $\{[x_n]\}$, 不妨设对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\|[x_{n+1}]-[x_n]\|_0=\|[x_n-x_{n+1}]\|_0\le\frac{1}{2^{n+1}}$$

取 $y_{n,n+1}\in[x_n-x_{n+1}]$ 满足

$$\|y_{n,n+1}\|\le\|[x_n-x_{n+1}]\|_0+\frac{1}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^n}$$

记 $y_1=x_1,y_{n+1}=y_n-y_{n,n+1}$, 注意到 $y_{n,n+1}\in[x_n-x_{n+1}]$, $\exists z_n\in X_0$ 使得 $y_{n,n+1}=x_n-x_{n+1}+z_n$. 于是

$$y_{n+1}=y_n-(x_n-x_{n+1}+z_n)$$

或者

$$y_{n+1}-x_{n+1}=y_n-x_n-z_n$$

注意到 $y_1=x_1$ 递推得到 $y_{n+1}-x_{n+1}\in X_0$, 即 $[y_{n+1}]=[x_{n+1}]$. 对 $\forall p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|y_n-y_{n+p}\|&\le\sum_{k=1}^{p}\|y_{n+k-1}-y_{n+k}\|\\&\le\sum_{k=1}^{p}\|y_{n+k-1,n+k}\|\\&\le\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k-1}}\le\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

从而 $\{y_n\}\subset X$ 是基本列, 记 $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 因此

$$\|[x_n]-[y]\|_0=\|[y_n]-[y]\|_0=\|[y_n-y]\|_0\le\|y_n-y\|\to0$$

即 $(X/X_0,\|\cdot\|_0)$ 完备. $\square$

2.2 线性算子

本节主要介绍线性算子的定义及赋范空间之间有界算子的基本性质.

2.2.1 定义

定义 2.8. X, Y 线性空间, $D \subset X$ 为子空间. 若映射 $T : D \to Y$ 满足 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x_1, x_2 \in D$, 有

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \cdot Tx_1 + \mu \cdot Tx_2$$

称 T 为一个 线性算子. D 称为 T 的 定义域. $R(T) := \{Tx \mid x \in D\}$ 称为 T 的 值域. 特别地, 当 $D = X, Y = \mathbb{K}$ 时, 称 T 为 X 上的一个 线性泛函, 记为 $f := T$.

[注记: 上述定义仅与空间的线性结构有关.]

定义 2.9. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间.$T : X \to Y$ 是线性算子, 若存在常数 $M > 0$, 使得对 $\forall x \in X$, 有

$$\|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$$

称 T 是一个 有界算子.

性质 2.10. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间.$T : X \to Y$ 是线性算子, 则下列三条等价:
(1) T 是连续的.
(2) T 在 0 处连续.
(3) T 是有界的.

证明. (1) $\implies$ (2) 显然.
(2) $\implies$ (3) (反证) 假设 T 不是有界的, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X$, 使得

$$\|Tx_n\|_Y > n \cdot \|x_n\|_X$$

令 $y_n = \dfrac{x_n}{\|Tx_n\|_Y}$, 则 $\|y_n\|_X = \dfrac{\|x_n\|_X}{\|Tx_n\|_Y} < \dfrac{1}{n}$, 即 $y_n \to 0$, 但 $\|Ty_n\|_Y = \dfrac{\|Tx_n\|_Y}{\|Tx_n\|_Y} = 1 \not\to 0$, 与 T 在 $x=0$ 处连续矛盾.

(3) $\implies$ (1) 设 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x_0 \in X$, 则

$$\|Tx_n - Tx_0\|_Y = \|T(x_n - x_0)\|_Y \le M\|x_n - x_0\|_X \to 0$$

即 $Tx_n \to Tx_0, n \to \infty$ 时, 因此 T 连续. $\square$

例子: (1) $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 则 $T : X \to Y, x \mapsto Tx := Ax$ 是线性算子.

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为区域, $X = Y = C^\infty(\overline{\Omega})$

$$P(\partial_x) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \partial_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\cdots\partial x^{\alpha_n}}$, 则 $T : X \to Y, u(x) \mapsto Tu := P(\partial_x)u = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha u$ 是线性算子.

(3) $X = L^1(\mathbb{R}), Y = L^\infty(\mathbb{R})$, 则 $T : X \to Y, u \mapsto Tu := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}u(x)\,\mathrm{d}x$ 是线性算子.

2.2.2 有界算子空间

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间.

$$\mathscr{L}(X, Y) := \{T \mid T : X \to Y\text{是有界线性算子}\}$$

在 $\mathscr{L}(X, Y)$ 上引入:

1. $(\lambda \cdot T_1 + \mu \cdot T_2)(x) := \lambda \cdot T_1 x + \mu \cdot T_2 x, \forall x \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
2. $\|T\| := \sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y$ 显然 $\mathscr{L}(X, Y)$ 在上述加法和数乘下是线性空间.

定理 2.11. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间

(1) $(\mathscr{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ 是赋范空间

(2) 若 Y 是 Banach 空间, 则 $(\mathscr{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间.

证明. (1) (i) 正定性: 显然 $\|T\| \geq 0$, 若 $\|T\| = 0$, 则对 $\forall x \in X$, 有 $Tx = 0$, 即 $T = 0$.
(ii) 三角不等式: 对 $\forall T_1, T_2 \in \mathscr{L}(X, Y)$

$$\begin{aligned}
\|T_1 + T_2\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|(T_1 + T_2)x\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|_X=1} \|T_1 x + T_2 x\|_Y \\
&\leq \sup_{\|x\|_X=1} (\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y) \\
&\leq \sup_{\|x\|_X=1} \|T_1 x\|_Y + \sup_{\|x\|_X=1} \|T_2 x\|_Y \\
&= \|T_1\| + \|T_2\|
\end{aligned}$$

(iii) 齐次性: 对 $\forall \alpha \in \mathbb{K}, T \in \mathscr{L}(X, Y)$

$$\begin{aligned}
\|\alpha T\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|\alpha \cdot Tx\|_Y \\
&= |\alpha| \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \\
&= |\alpha| \|T\|
\end{aligned}$$

(2) 设 $\{T_n\} \subset \mathscr{L}(X, Y)$ 是基本列, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 对 $\forall p \in \mathbb{N}$, 有 $\|T_{n+p} - T_n\| \leq \varepsilon$, 于是, 对 $\forall x \in X$, 有

$$\begin{aligned}
\|T_{n+p}x - T_n x\|_Y &= \|(T_{n+p} - T_n)x\|_Y \\
&\leq \|T_{n+p} - T_n\| \cdot \|x\|_X \quad (\|\cdot\|\text{的定义}) \\
&\leq \varepsilon \cdot \|x\|_X
\end{aligned} \tag{2.12}$$

这说明 $\{T_n x\} \subset Y$ 是基本列. 由 Y 的完备性, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ 存在, 作映射

$$T : X \to Y, x \mapsto Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \in Y$$

下证: $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$
(i) 显然 T 是线性的
(ii) 证明 $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$. 在 (**2.12**)式中令 $p \to \infty$ 时有

$$\|T_n x - Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X$$

从而

$$\frac{\|(T_n - T)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$

由 $\|\cdot\|$ 的定义 $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$.

(iii) 证明 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. 由 (ii) 知, 对 $\varepsilon = 1$ 时, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall x \in X, \|x\|_X = 1$ 有

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y &\leq \|T_n x\|_Y + 1\\ &\leq \|T_n\| \cdot \|x\|_X + \|x\|_X\\ &\leq (\|T_n\| + 1) \cdot \|x\|_X\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T_n\| + 1$$

注意到 $\{T_n\} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ 是有界的, 因此 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. □

[注记:(1) $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, 则 $\forall x \in X$ 有 $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$
(2) 若对 $\forall x \in X$, $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, 则 $\|T\| \leq M$.
(3) $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X), X^* := \mathscr{L}(X,\mathbb{K})$.]

例子: (1) X, Y 是赋范空间, $T : X \to Y$ 是线性算子. 若 $\dim X < +\infty$, 则 T 是有界的.

证明. 设 $\dim X = m, \dim R(T) = n$, 则 $(R(T), \|\cdot\|_Y)$ 是有限维赋范空间, 注意到有限维赋范空间上范数等价. 不妨 $X, R(T)$ 取标准范数, 设 $\{e_1, \cdots, e_m\}, \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为 $X, R(T)$ 的一组基. 则

$$Te_i = \sum_{\alpha=1}^{n} t_i^{\alpha} \varepsilon_{\alpha}, \forall 1 \leq i \leq n$$

于是, 对 $\forall x=\sum_{i=1}^{m} x^i e_i$ 有

$$
\begin{aligned}
\|Tx\|_Y &= \left\|\sum_{i=1}^{m} x^i T e_i\right\|_Y = \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} x^i t_i^\alpha \varepsilon_\alpha\right\|_Y \\
&= \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m} t_i^\alpha x^i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|t_i^\alpha|^2\cdot\sum_{i=1}^{m}\left|x^i\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Cauchy}-\text{Schwarz}) \\
&= \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|t_i^\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}\left|x^i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|t_i^\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\|x\|_X
\end{aligned}
$$

即 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$. □

(2) (无界线性算子) $X=\mathrm{C}^1[0,1], Y=\mathrm{C}[0,1]$,

$$\|u\|_X := \max_{t\in[0,1]}|u(t)|\,, \|v\|_Y := \max_{t\in[0,1]}|v(t)|$$

则 $T:X\to Y, u(t)\mapsto Tu:=u'(t)$ 是无界的.

证明. (反证) 取 $u_n(t)=\dfrac{t^n}{n}$, 则

$$\|u_n(t)\|_X = \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{t^n}{n}\right| = \frac{1}{n}\to 0, n\to\infty$$

$$\|Tu_n\|_Y = \max_{t\in[0,1]}\left|t^{n-1}\right| = 1 \not\to 0$$

即 T 是无界的. □

2.3 有界算子的基本定理

利用 Baire 纲定理来研究 Banach 空间之间算子有界性的若干性质, 主要内容有: 开映射定理,Banach 逆映射定理, 闭图像定理, 共鸣定理.

2.3.1 开映射定理

定义 2.13. $(X,\rho),(Y,d)$ 是度量空间, 若映射 $T: X \to Y$ 满足 $\forall \mathcal{O} \subset X$ 是开集, 有 $T(\mathcal{O}) \subset Y$ 开集, 称 T 是 开映射.

定理 2.14. 开映射定理: X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. 若 T 是满射, 则 T 是开映射.

分析: (i) $B_r(x_0) = x_0 + B_r(0), U_\delta(Tx_0) = Tx_0 + U_\delta(0)$, 其中 $B_r(x_0) \subset X, U_\delta(y_0) \subset Y$.
(ii) T 线性: $U_\delta(0) \subset T(B_r(0)) \Leftrightarrow U_{\varepsilon\delta}(0) \subset T(B_{\varepsilon r}(0)), \forall \varepsilon > 0$. 要证 $\forall W \subset X$ 开集, 有 $TW \subset Y$ 是开集 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in W, \exists \delta > 0$, 使得 $U_\delta(Tx_0) \subset TW \Leftrightarrow \exists \delta > 0$, 使得 $U_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

证明. 记号约定: $B_r(x) :=X$ 中以 x 为球心, 半径为 r 的开球; $\widetilde{B}_r(y) := Y$ 中以 y 为球心, 半径为 r 的开球. 由 X, Y 是线性空间及 T 的线性性, 要证 T 是开映射 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0$, 使得 $\widetilde{B}_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.
Step1. 先证 $\exists \delta > 0$ 使得 $\widetilde{B}_{3\delta}(0) \subset \overline{TB_1(0)}$
注意到 $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k(0)$, 则由 T 是满射知 $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{TB_k(0)}$. 又 Y 是完备的, Y 是第二纲集, $\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\overline{TB_n(0)}$ 不是疏集, 因此有内点, 即 $\exists \widetilde{B}_r(y_0) \subset \overline{TB_n(0)}$. 由于 $\overline{TB_n(0)} \subset Y$ 是对称的凸集, 则 $\widetilde{B}_r(-y_0) \subset \overline{TB_n(0)}$(对称), 再由 $\overline{TB_n(0)}$ 的凸性知 $\widetilde{B}_r(0) \subset \overline{TB_n(0)}$. 根据 T 的线性性, $\widetilde{B}_{\frac{r}{n}}(0) \subset \overline{TB_1(0)}$. 取 $0 < 3\delta < \dfrac{r}{n}$, 则 $\widetilde{B}_{3\delta}(0) \subset \overline{TB_1(0)}$, 或 $\widetilde{B}_\delta(0) \subset \overline{TB_{\frac{1}{3}}(0)}$.
Step2. 再证 $\widetilde{B}_\delta(0) \subset TB_1(0)$, 只需证 $\forall y_0 \in \widetilde{B}_\delta(0), \exists x_0 \in B_1(0)$, 使得 $Tx_0 = y_0$.
根据 Step1, 任取 $y_0 \in \widetilde{B}_\delta(0), \exists x_1 \in B_{\frac{1}{3}}(0)$ 使得 $\|y_0 - Tx_1\|_Y < \dfrac{\delta}{3}$. 令 $y_1 = y_0 - Tx_1$, 则 $y_1 \in \widetilde{B}_{\frac{\delta}{3}}(0)$, 同理 $\exists x_2 \in B_{\frac{1}{3^2}(0)}(0)$ 使得 $\|y_1 - Tx_2\|_Y < \dfrac{\delta}{3^2}$, 令 $y_2 = y_1 - Tx_2 \in \widetilde{B}_{\frac{\delta}{3^2}}(0)$. 重复上述过程, 对 $y_n = y_{n-1} - Tx_n \in \widetilde{B}_{\frac{\delta}{3^n}}(0)$, $\exists x_{n+1} \in B_{\frac{1}{3^{n+1}}}(0)$ 使得 $\|y_n - Tx_{n+1}\|_Y < \dfrac{\delta}{3^{n+1}}$. 注意到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \le \dfrac{1}{2}$, 由 X 的完备性知, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ 存在,

记 $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. 另一方面,

$$\|y_n\|_Y = \|y_{n-1} - Tx_n\|_Y = \left\| y_0 - T\sum_{k=1}^{n} x_k \right\|_Y < \frac{\delta}{3^n}$$

由 T 的连续性, 令 $n\to\infty$ 得到 $\|y_0 - Tx_0\|_Y = 0$, 即 $Tx_0 = y_0$. □

推论 2.15. Banach 逆算子定理: X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 是双射, 则 $T^{-1} \in \mathscr{L}(X,Y)$.

证明. 注意到 T 是满射, 由开映射定理的证明, $\exists\delta > 0$, 使得 $\widetilde{B}_1(0) \subset TB_\delta(0)$. 于是, $T^{-1}\widetilde{B}_1(0) \subset B_\delta(0)$. 对 $\forall y \in Y, \varepsilon > 0$, 有 $\dfrac{y}{\|y\|_Y + \varepsilon} \in \widetilde{B}_1(0)$, 则

$$\left\| T^{-1}\frac{y}{\|y\|_Y + \varepsilon} \right\|_X \le \delta \text{或} \|T^{-1}y\|_X \le \delta\cdot(\|y\|_Y + \varepsilon)$$

令 $\varepsilon \to 0$ 有 $\|T^{-1}y\|_X \le \delta\|y\|_Y$, 即 T^{-1} 是有界算子. □

推论 2.16. 等价范数定理: X 是线性空间, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个完备范数. 若存在常数 $C > 0$ 使得对 $\forall x \in X$ 有 $\|x\|_1 \le C\|x\|_2$, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

证明. 取 $T = \mathrm{id} : (X, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1), x \mapsto Tx = x$. 于是 $\|Tx\|_1 = \|x\|_1 \le C\|x\|_2$, 即 T 连续. 显然 T 是 Banach 空间之间的双射, 由 Banach 逆算子定理, $T^{-1} = \mathrm{id} : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ 是有界算子. 因此, $\exists C' > 0$ 使得 $\|x\|_2 = \|Tx\|_2 \le C'\|x\|_1$, 即 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. □

2.3.2 闭算子

本小节主要介绍一类重要算子, 即闭算子, 并给出它是有界算子的充要条件.

定义 2.17. $(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间, $T:D\subset X\to Y$ 是线性算子. 若 T 满足: 当 $x_n\to x, Tx_n\to y$ 时, 有 $x\in D$ 且 $Tx=y$, 称 T 为 闭算子.

问题: 有界算子与闭算子之间有什么关系?

性质 2.18. X,Y 是赋范空间, Y 完备. $T\in\mathscr{L}(D,Y)$, 则 $\exists\widetilde{T}\in\mathscr{L}(\overline{D},Y)$ 使得 $\widetilde{T}|_D=T$ 且 $\|\widetilde{T}\|=\|T\|$.

证明. 对 $\forall x\in\overline{D},\exists\{x_n\}\subset D$ 使得 $x_n\to x$. 注意到

$$\|Tx_n-Tx_m\|_Y\le\|T\|\cdot\|x_n-x_m\|_X$$

从而 $\{Tx_n\}\subset Y$ 是基本列. 由 Y 的完备性, $\exists y\in Y$ 使得 $Tx_n\to y$. 易知, y 仅依赖于 x, 与 $\{x_n\}$ 的选取无关. 定义 $\widetilde{T}:\overline{D}\to Y, x\mapsto\widetilde{T}x=y=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n$, 则 $\widetilde{T}$ 线性且 $\widetilde{T}|_D=T$. 由于 $D\subset\overline{D}$, 显然有 $\|T\|\le\|\widetilde{T}\|$. 另一方面,

$$\|\widetilde{T}x\|_Y=\|y\|_Y=\lim_{n\to\infty}\|Tx_n\|_Y\le\lim_{n\to\infty}\|T\|\cdot\|x_n\|_X=\|T\|\cdot\|x\|_X$$

即 $\|\widetilde{T}\|\le\|T\|$. □

[注记:(1) 命题说明: 到完备赋范空间中的有界算子都可以保范延拓到它定义域的闭包上, 使之成为闭算子.
(2) 一般地, 闭算子未必能延拓到定义域的闭包上, 使之成为闭算子.
(3) 在性质 (2.18)的意义下, 完备赋范空间中的有界算子可以看成闭算子.]

例子: $X=Y=\mathrm{C}[0,1]$, 取最大值范数. $D=\mathrm{C}^1[0,1], T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则 $T:D\to Y$ 是闭算子.

证明. 设 $x_n(t)\to x(t), \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=Tx_n\to y(t)\in\mathrm{C}[0,1]$, 则

$$x_n(t)-x_n(0)\to\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$x_n(t)-x_n(0)\to x(t)-x(0)$$

于是, $x(t)=\displaystyle\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau+x(0)\in D$, 且 $Tx=y$. □

[注记:(1) 例子说明闭算子可以不是有界算子 (2) 结合性质 (2.18), 闭算子要比有界算子广.]

定义 2.19. $(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间. $X\times Y:=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$, 易知 $\|(x,y)\|:=\|x\|_X+\|y\|_Y$ 是 $X\times Y$ 上范数, 称 $(X\times Y,\|\cdot\|)$ 为 X,Y 的乘积空间.

定义 2.20. $(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$ 是赋范空间, $D\subset X$ 为子空间. $T:D\to Y$ 是线性算子, 称 $\Gamma(T):=\{(x,Tx)\mid x\in D\}\subset X\times Y$ 为算子 T 的 图像.

性质 2.21. X,Y 为赋范空间, $D\subset X$ 为子空间, $T:D\to Y$ 为闭算子 $\Leftrightarrow \Gamma(T)\subset X\times Y$ 闭.

证明. $(\Longrightarrow)$ 若 $(x_n,Tx_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}(x,y)$, 下证 $(x,y)\in\Gamma(T)$. 由

$$\|x_n-x\|_X+\|Tx_n-y\|_Y=\|(x_n,Tx_n)-(x,y)\|\to 0(n\to+\infty)$$

有 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_X}x$, 由 T 闭算子定义知 $x\in D$, $Tx=y$, 即 $(x,y)\in\Gamma(T)$,$Tx_n\xrightarrow{\|\cdot\|_Y}y$, 故 $\Gamma(T)\subset X\times Y$ 闭.
$(\Longleftarrow)$ 设 $\{x_n\}\subset D,x_n\to x,Tx_n\to y$. 由 $\Gamma(T)$ 的闭性, $(x_n,Tx_n)\to(x,y)\in\Gamma(T)$, 从而 $x\in D$ 且 $y=Tx$. □

定理 2.22. 闭图像定理: X,Y 是 Banach 空间,$T:D\to Y$ 是闭算子, 若 $D\subset X$ 为闭子空间, 则 $T\in\mathscr{L}(D,Y)$.

证明. 在 D 上引入新范数: $\|x\|:=\|x\|_X+\|Tx\|_Y,\forall x\in D$.
Step1. 先证 $(D,\|\cdot\|)$ 完备.
设 $\{x_n\}\subset(D,\|\cdot\|)$ 为基本列, 由 $\|\cdot\|$ 的定义知 $\{x_n\}\subset X$, $\{Tx_n\}\subset Y$ 是基本列, 则 $x_n\to x\in X,Tx_n\to y\in Y$. 根据闭算子定义, $x\in D,Tx=y$. 于是, $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x\in D$.

Step2. 由 Step1 知 $\|\cdot\|, \|\cdot\|_X$ 是 D 上的完备范数, 且 $\|x\|_X \le \|x\|, \forall x \in D$. 由范数等价性定理, $\exists C > 0$ 使得 $\|x\| \le C \cdot \|x\|_X, \forall x \in D$. 特别地, $\|Tx\|_Y \le C \cdot \|x\|_X, \forall x \in D$, 即 $T \in \mathscr{L}(D, Y)$. □

[注记:Banach 空间之间的闭算子是有界算子.]

2.3.3 共鸣定理

定理 2.23. 共鸣定理:X 为 Banach 空间, Y 是赋范空间. $\mathcal{W} \in \mathscr{L}(X, Y)$. 若对 $\forall x \in X, \exists M_x > 0$ 使得

$$\sup_{T \in \mathcal{W}} \|Tx\|_Y \le M_x < +\infty$$

则 $\exists M > 0$ 使得 $\sup\limits_{T \in \mathcal{W}} \|T\| \le M$.

证明. 在 X 上引入 $\|x\| := \|x\|_X + \sup\limits_{T \in \mathcal{W}} \|Tx\|_Y$.

(i) 显然 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间.

(ii) 证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. 设 $\{x_n\} \subset (X, \|\cdot\|)$ 是基本列, 则对 $\forall m, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_n\|_X + \sup_{T \in \mathcal{W}} \|Tx_m - Tx_n\|_Y \tag{2.24}$$

由 (**2.24**)知, $\{x_n\} \subset X$ 是基本列, 有

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \in X$$

且 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得当 $n, m > N(\varepsilon)$, 对 $\forall T \in \mathcal{W}$ 有

$$\|Tx_m - Tx_n\|_Y < \varepsilon$$

令 $n \to \infty$, 有

$$\|Tx_m - Tx\|_Y \le \varepsilon, \forall T \in \mathcal{W}$$

结合(**2.24**)式子, 有 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, 即 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. 注意到对 $\forall x \in X, \|x\|_X \leq \|x\|$, 根据等价范数定理, $\exists M > 0$ 使得

$$\|Tx\|_Y \leq \sup_{T \in \mathcal{W}} \|Tx\|_Y \leq \|x\| \leq M\|x\|_X, \forall T \in \mathcal{W}$$

因此,$\|T\| \leq M, \forall T \in \mathcal{W}$. □

[注记: 定理给出了一族算子一致有界的判断方法.]

推论 2.25. (Banach – Steinhaus): X 是 Banach 空间,Y 是赋范空间, $\{T_n, T\} \subset \mathscr{L}(X, Y), X_0 \subset X$ 稠密子集. 则对 $\forall x \in X$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ 的充要条件是 $\{\|T_n\|\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n y = Ty, \forall y \in X_0$.

证明. $(\Longrightarrow)$ 由共鸣定理, 结论显然.
$(\Longleftarrow)$ 设 $\|T_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. 由 $X_0 \subset X$ 为稠密子集, 那么 $\forall x \in X$, 任给 $\varepsilon > 0, \exists y \in X_0$ 使得

$$\|x - y\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2(M + \|T\|)}$$

$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\| &\leq \|T_n x - T_n y\|_Y + \|T_n y - Ty\|_Y + \|Ty - Tx\|_Y \\ &\leq \|T_n\| \cdot \|x - y\|_X + \|T_n y - Ty\|_Y + \|T\| \cdot \|y - x\|_X \\ &\leq (M + \|T\|)\|x - y\|_X + \|T_n y - Ty\|_Y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_n y - Ty\|_Y \end{aligned}$$

注意到 $y \in X_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n y = Ty$, 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$. □

[注记: 定理中描述了有界线性算子的一种收敛方式, $\{T_n, T\} \subset \mathscr{L}(X, Y)$, 若对 $\forall x \in X$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$, 称 T_n 强收敛于 T. 称 $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ 是 T_n一致收敛于 T.]

3 Hilbert 空间

本章主要介绍 Hilbert 空间的基本性质, 有正交性, 正交分解,Riesz 表示定理及其应用.

3.1 内积

本节主要介绍内积定义, 内积与范数之间的联系.

3.1.1 定义

回顾 $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$.

$$(z, w) := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$$

有性质:

(1) $(\lambda z_1 + \mu z_2, w) = \lambda(z_1, w) + \mu(z_2, w)$

(2) $(z, \lambda w_1 + \mu w_2) = \overline{\lambda}(z, w_1) + \overline{\mu}(z, w_2)$

(1) 与 (2) 合称 共轭双线性

(3) 共轭对称性: $(z, w) = \overline{(w, z)}$

(4)正定性: $(z, z) \geq 0. (z, z) = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

定义 3.1. X 是线性空间, 映射 $a : X \times X \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto a(x, y) \in \mathbb{K}$.
(1) 若 $a(\cdot, \cdot)$ 满足性质 $(1), (2)$, 称 a 为 X 上的 共轭双线性型, 称 $q(x) := a(x, x)$ 为 a 的 二次型.
(2) 若 a 满足性质 $(1), (2), (3), (4)$, 称 a 为 X 上的一个 内积,$(X, a(\cdot, \cdot))$ 称为 内积空间.

例子: (1) $X = \mathbb{C}^n$

- A 是 Hermitian 方阵, $(x, y) := xA\overline{y}^t$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的共轭双线性型.
- A 是正定 Hermitian 方阵, $(x, y) := xA\overline{y}^t$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的内积.

(2) $X = \ell^2 = \left\{ u = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \middle| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}$

$$(u, v) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$$

是 ℓ^2 上的内积.

(3) $X = L^2(\Omega, \mu)$, $(u, v) := \int_{\Omega} u\overline{v} \, \mathrm{d}\mu$ 是 L^2 内积.

(4) $X = \mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$

$$(u, v) := \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \overline{\partial^\alpha v} \, \mathrm{d}x$$

是 $\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$ 上的内积.

性质 3.2. 二次型 $q(x) = a(x, x) \in \mathbb{R} \iff a(x, y) = \overline{a(y, x)}, \forall x, y \in X$

证明. $(\Longleftarrow)$ 显然.
$(\Longrightarrow)$ 对 $\forall x, y \in X$, 有

$$q(x + y) = q(x) + a(x, y) + a(y, x) + q(y) \tag{3.3}$$

由 $q(x + y) = \overline{q(x + y)}$, 从(**3.3**)式得

$$a(x, y) + a(y, x) = \overline{a(x, y)} + \overline{a(y, x)} \tag{3.4}$$

在 (**3.4**)式中用 iy 代替 y 得到

$$-a(x, y) + a(y, x) = \overline{a(x, y)} - \overline{a(y, x)} \tag{3.5}$$

(**3.4**) − (**3.5**)得

$$a(x, y) = \overline{a(y, x)}$$

□

性质 3.6. 广义 Cauchy − Schwarz: 设 a 是 X 上的共轭双线性型, 若二次型 $q(x)$ 满足正定性: $q(x) \ge 0, \forall x \in X$ 且 $q(x) = 0 \iff x = 0$, 那么对 $\forall x, y \in X$ 有

$$|a(x, y)|^2 \le q(x) q(y)$$

等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

证明. 不妨设 $y \ne 0$, 则对 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ 有

$$0 \le q(x + \lambda y) = q(x) + \lambda a(y, x) + \overline{\lambda} a(x, y) + |\lambda|^2 q(y) \tag{3.7}$$

取 $\lambda = -\dfrac{a(x,y)}{q(y)}$ 代入 (**3.7**)式得

$$\begin{aligned}0 \le q(x+\lambda y) &= q(x) - 2\frac{|a(x,y)|^2}{q(y)} + \frac{|a(x,y)|^2}{q(y)} \\ &= q(x) - \frac{|a(x,y)|^2}{q(y)}\end{aligned}$$

其中用到了 $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$(因为由假设 $q(x) \ge 0$ 知 $q(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$, 由性质(3.2)即得). 因此,

$$|a(x,y)|^2 \le q(x)q(y)$$

等号成立 $\Longleftrightarrow x + \lambda y = 0$, 即 x, y 线性相关. □

[注记: 当 $a(\cdot,\cdot)$ 是内积时, 记 $a(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)$, 有 $|(x,y)|^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$, 其中 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, 即常见的 Cauchy-Schwarz 不等式.]

3.1.2　内积与范数

性质 3.8. 设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, 令 $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, 则 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间.

证明. (i) $\|x\| \ge 0$.$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(ii)$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$
(iii) 对 $\forall x, y \in X$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}((x,y)) + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\,|(x,y)| + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \ (\mathrm{Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

因此 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. □

[注记:(1) 内积空间 $\subseteq$ 赋范空间 $\subseteq$ 度量空间.
(2) 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.]
问题: 给出一个赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$, 什么条件下 $\|\cdot\|$ 可以由内积诱导出?

性质 3.9. $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $\|\cdot\|$ 是内积诱导的 $\Longleftrightarrow$ $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则, 即

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in X$$

证明. $(\Longrightarrow)$　显然.
$(\Longleftarrow)$　(i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. 令

$$(x, y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

则 $(\cdot, \cdot)$ 有性质:

- $(x, y) = (y, x)$
- $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $(-x, y) = -(x, y)$

下证: $(x+y, z) = (x, z) + (y, z), (\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
&\|x+y+z\|^2 + \|x-y\|^2 \\
&= \left\|\left(x+\frac{z}{2}\right) + \left(y+\frac{z}{2}\right)\right\|^2 + \left\|\left(x+\frac{z}{2}\right) - \left(y+\frac{z}{2}\right)\right\|^2 \\
&= 2\left(\left\|x+\frac{z}{2}\right\|^2 + \left\|y+\frac{z}{2}\right\|^2\right) \text{ (平行四边形法则)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
&\|x+y-z\|^2 + \|x-y\|^2 \\
&= \left\|\left(x-\frac{z}{2}\right) + \left(y-\frac{z}{2}\right)\right\|^2 + \left\|\left(x-\frac{z}{2}\right) - \left(y-\frac{z}{2}\right)\right\|^2 \\
&= 2\left(\left\|x-\frac{z}{2}\right\|^2 + \left\|y-\frac{z}{2}\right\|^2\right) \text{ (平行四边形法则)}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.10) $-$(3.11), 由 $(\cdot, \cdot)$ 的定义

$$(x+y, z) = 2\left(x, \frac{z}{2}\right) + 2\left(y, \frac{z}{2}\right) \tag{3.12}$$

在 (3.12)中分别取 $x=0, y=0$ 得到

$$(y,z)=2\left(y,\frac{z}{2}\right),(x,z)=2\left(x,\frac{z}{2}\right) \tag{3.13}$$

代入 (3.12)式得

$$(x+y,z)=(x,z)+(y,z) \tag{3.14}$$

由 (3.14)式, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$(nx,y)=n(x,y) \tag{3.15}$$

对 $\forall q=\dfrac{n}{m}\in\mathbb{Q}^{+}$, 根据 (3.15)式有

$$m(qx,y)=(mqx,y)=(nx,y)=n(x,y)$$

因此 $(qx,y)=q(x,y)$. 再根据连续性, 对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}^{+}$, 有

$$(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$$

(ii) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, 令

$$(x,y):=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\left(\|x+\mathrm{i}y\|^2-\|x-\mathrm{i}y\|^2\right)\right)$$

类似 (i) 验证. □

3.2 Hilbert 空间的基

本节主要介绍内积空间正交的基本性质,Hilbert 空间基的存在性及性质, 可分 Hilbert 空间的结构.

3.2.1 正交

定义 3.16. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $M\subset X$ 为子集, $x,y\in X$.
(1) 若 $(x,y)=0$, 称 x 与 y正交, 记为 $x\perp y$.
(2) 若对 $\forall y\in M$, 有 $x\perp y$, 称 x 与 M 正交, 记为 $x\perp M$.
(3) 称 $M^{\perp}:=\{x\in X\mid x\perp M\}$ 为 M 的 正交补.

性质 3.17. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $M\subset X$, 则 $M^{\perp}\subset X$ 是闭子空间.

证明. (i) $M^{\perp}$ 是线性空间
设 $x,y\in M^{\perp},\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, 则对 $\forall z\in M$ 有

$$(\lambda x+\mu y,z)=\lambda(x,z)+\mu(y,z)=0$$

即 $(\lambda x+\mu y)\perp M$, 或 $(\lambda x+\mu y)\in M^{\perp}$.
(ii)M 是闭的.
设 $x_n\in M^{\perp},x_n\to x$, 则对 $\forall y\in M$ 有

$$\begin{aligned}|(x,y)|&=|(x-x_n,y)+(x_n,y)|\\&=|(x-x_n,y)|\leq\|x-x_n\|\cdot\|y\|\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

即 $x\perp y,x\in M^{\perp}$. □

定义 3.18. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $S:=\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}\subset X$, 若 S 满足:
(1) 对 $\forall\alpha,\beta\in\Lambda,e_\alpha\perp e_\beta$.
(2) 对 $\forall\alpha\in\Lambda,\|e_\alpha\|=1$.
称 S 是 X 的一个 正交规范集.

[注记: 若 S 仅满足 (1), 称 S 为 正交集. 若正交集 S 满足 $S^{\perp}=\{0\}$, 称 S 为完备的.]
问题: 完备正交集是否一定存在?

性质 3.19. 非零的内积空间一定有完备正交集.

证明. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, 在 X 的所有正交子集构成的集合 $\mathscr{X}$ 中引入序关系为包含关系. 于是, $\mathscr{X}$ 中任意完全有序子集有上界, 为它们的并. 根据 Zorn 引理, $\mathscr{X}$ 有极大元 S, 则 $S^{\perp}=\{0\}$. 否则, 存在 $0\neq x_0\in S^{\perp}$, 则 $S\subset\widetilde{S}:=S\cup\{x_0\}$, $\widetilde{S}$ 仍是正交集, 与 S 的极大性矛盾. □

3.2.2 Hilbert 空间的基

定理 3.20. Bessel: $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $S:=\{e_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}\subset X$ 为正交规范集, 则对 $\forall x\in X$ 有

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2\leq\|x\|^2$$

称为 Bessel 不等式.

证明. (i) 上述和是至多可数项求和. 对指标 Λ 的任意有限子集, 不妨记为 $\{1,2,\cdots,m\}$ 有

$$\begin{aligned}0&\leq\left\|x-\sum_{i=1}^m(x,e_i)e_i\right\|^2\\&=\left(x-\sum_{i=1}^m(x,e_i)e_i,x-\sum_{i=1}^m(x,e_i)e_i\right)\\&=\|x\|^2-2\sum_{i=1}^m|(x,e_i)|^2+\sum_{i=1}^m|(x,e_i)|^2\\&=\|x\|^2-\sum_{i=1}^m|(x,e_i)|^2\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=1}^m|(x,e_i)|^2\leq\|x\|^2 \tag{3.21}$$

根据估计式(**3.21**), 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 满足 $|(x,e_\alpha)|>\dfrac{1}{n}$ 的指标 α 只有有限个, 从而 $(x,e_\alpha)\neq 0$ 的指标 α 是至多可数个.

(ii) 由 (i), $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$ 中至多有可数项求和, 再有 (**3.21**)式知结论成立. □

推论 3.22. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $S=\{e_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 是 X 中的正交规范集, 则对 $\forall x\in X$ 有

(1) $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\in X$

(2) $\left\|x-\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$

证明. (1) 由定理(3.20)的证明, $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$ 是至多可数和, 不妨记为

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$$

令 $x_m=\sum\limits_{k=1}^{m}(x,e_k)e_k$, 则对 $\forall p\in\mathbb{N}$ 有

$$\|x_{m+p}-x_m\|^2=\left\|\sum_{k=m+1}^{k=m+p}(x,e_k)e_k\right\|^2=\sum_{k=m+1}^{m+p}|(x,e_k)|^2 \tag{3.23}$$

由 Bessel 不等式, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2\le\|x\|^2$, 因此级数收敛. 由 (**3.23**)知, $\{x_m\}\subset X$ 是基本列, 有 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k\in X$.

(2) 注意到对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{m}(x,e_k)e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{m}|(x,e_k)|^2$$

令 $m\to\infty$ 即可. □

定义 3.24. $(X,\|\cdot\|)$ 是内积空间, $S=\{e_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 为 X 的正交规范集, 若对 $\forall x\in X$, 有

$$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$$

称 S 为 X 的一组 正交规范基, $\{(x,e_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\}$ 称为 x 关于 S 的 Fourier 系数.

[注记: 正交规范基不是代数基.]

定理 3.25. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $S=\{e_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 是正交规范集, 下列三条等价:

(1) S 是 X 的正交规范基

(2) S 是完备的

(3) Parseval 等式成立: $\|x\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2, \forall x\in X$

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2) (反证) 假设 S 不完备, $\exists 0\neq x\in S^\perp$, 则 $(x,e_\alpha)=0,\forall\alpha\in\Lambda$. 但由于 S 是 X 的正交规范基, $x=\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=0$, 矛盾.

(2) $\Longrightarrow$ (3) (反证) 若 $\exists x\in X$, 使得 Parseval 等式不成立, 则有

$$\left\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2>0$$

令 $y:=x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\neq 0$, 于是, 对 $\forall\alpha\in\Lambda,(y,e_\alpha)=(x,e_\alpha)-(x,e_\alpha)=0$, 即 $y\in S^\perp$, 与 S 完备矛盾.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 注意到

$$\left\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2, \forall x\in X$$

若 Parseval 等式成立, 则 $x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=0$, 即 S 为 X 的正交规范基. □

例子: (1) $X=L^2[0,2\pi],(u,v):=\int_0^{2\pi}u\overline{v}\,\mathrm{d}t$

$$S:=\left\{e_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}nt}\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$$

是 $(X,(\cdot,\cdot))$ 的一个正交规范基.

(2)$X = \ell^2 := \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \middle| x_i \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$$

$S := \{e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots) \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 为 ℓ^2 的一组正交规范基.

(3) $X = H^2(D) := \left\{ u在D上全纯 \middle| \int_D |u|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < \infty \right\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为单位圆盘. 规定内积为

$$(u, v) := \iint_D u\overline{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

则 $S := \left\{ u_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \middle| n = 0, 1, \cdots \right\}$ 为 $H^2(D)$ 的一组正交规范基.

证明. 对 $\forall m \leq n$, 有

$$\begin{aligned} (u_m, u_n) &= \frac{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}}{\pi} \iint_D z^m \overline{z^n} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{m+n+1} e^{\mathrm{i}(m-n)\theta} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= \delta_{mn} \end{aligned}$$

再根据 Taylor 展开, $\forall u \in H^2(D)$, u 可以表示成 S 中元素的和. □

3.2.3 可分 Hilbert 空间的结构

定义 3.26. (X, ρ) 是度量空间, 若存在 X 的可数子集 M, 使得 $\overline{M} = X$, 称 X 是 可分的.

定义 3.27. $(X_1, (\cdot,\cdot)_1), (X_2, (\cdot,\cdot)_2)$ 为内积空间, 若 $\exists T: X_1 \to X_2$ 满足:
(1)T 是线性同构 (既单又满)
(2) 对 $x, y \in X_1$, 有 $(Tx, Ty)_2 = (x, y)_1$
称 T 是内积空间 $(X_1, (\cdot,\cdot)_1)$ 到 $(X_2, (\cdot,\cdot)_2)$ 的一个 等距同构 .

定理 3.28. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 则 X 是可分的 $\Longleftrightarrow (X,(\cdot,\cdot))$ 同构于 ℓ^2 或 $\mathbb{K}^n$.

证明. (i) 先证明 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是可分 Hilbert 空间 $\Longleftrightarrow X$ 有至多可数的规范正交基.
$(\Longrightarrow)$　设可数集 $M\subset X$ 稠密, 即 $\overline{M}=X$. 取 M 的一个极大线性无关组

$$M'=\{x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_N\}\quad(N=+\infty\text{或}N<+\infty)$$

把 M' 中元素 Schmidt 正交化得

$$S=\{e_1,\cdots,e_k,\cdots,e_N\}$$

则有 $\overline{\operatorname{Span}S}=\overline{\operatorname{Span}M'}=X$, 对 $\forall x\in X$, 存在基本列

$$\left\{x_m:=\sum_{k=1}^N a_{m,k}e_k\right\}$$

使得 $x_m\to x$. 那么对任意 k 固定, $\{a_{m,k}\mid m=1,\cdots,\infty\}\subset\mathbb{K}$ 是基本列 (因为 $|a_{m,k}-a_{n,k}|\le\|x_m-x_n\|$), 记 $a_k=\lim\limits_{m\to\infty}a_{m,k}$, 则 $x=\sum\limits_{k=1}^N a_ke_k$, 即 S 是 X 的一组规范正交基.
$(\Longleftarrow)$　设 $S=\{e_1,\cdots,e_N\}$, N 同上, 是 X 的一组规范正交基, 于是, 对 $\forall x\in X, x=\sum\limits_{k=1}^N a_ke_k, a_k\in\mathbb{K}$. 取

$$M=\left\{\sum_{k=1}^N a_ke_k\,\middle|\,\operatorname{Re}(a_k),\operatorname{Im}(a_k)\in\mathbb{Q}\right\}$$

则 M 可数, 且 M 在 X 中稠密.
(ii) 由 (i), 取 X 的一组规范正交基 $S=\{e_1,\cdots,e_N\},N=\infty$ 或 $N=n<\infty$. 做对应

$$\begin{aligned}T:X\quad&\longrightarrow\quad\ell^2\text{或}\mathbb{K}^n\\ x=\sum_{k=1}^N(x,e_k)e_k\quad&\longmapsto\quad((x,e_1),\cdots,(x,e_N))\end{aligned}$$

由 Parseval 等式有

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(x, e_k)|^2 \quad \forall x \in X$$

由此可见, 对应 T 是 $X \to \mathbb{K}^N$(当$N < \infty$) 或 $X \to \ell^2$(当$N = \infty$) 的既单又满线性同构. 此外,

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i, \sum_{j=1}^{N} (x, e_j) e_j \right) = \sum_{i=1}^{N} (x, e_i) \overline{(y, e_i)}, \forall x, y \in X$$

因此 T 还是保持内积的. 于是当 $N < \infty$ 时, X 同构于 $\mathbb{K}^N$; 而当 $N = \infty$ 时, X 同构于 ℓ^2. □

3.3 正交分解

本节主要介绍 Hilbert 空间中点到闭凸集最佳逼近元的存在性, 由此导出 Hilbert 空间关于 闭子空间的分解.

3.3.1 点到闭凸子集的最佳逼近

定义 3.29. (X, ρ) 是度量空间, $x \in X$, $M \subset X$ 是子集. 若存在 $y \in M$ 使得

$$\rho(x, y) = \inf_{z \in M} \rho(x, z)$$

称 y 是 x 到 M 的 最佳逼近元. 此类问题称为 最佳逼近问题.

定理 3.30. $(X, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间, $x \in X, C \subset X$ 是闭凸集, 则存在唯一 $y \in C$ 使得

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

证明. (i) 存在性: 不妨设 $x \notin C$, 否则取 $y = x$ 即可. 对 $x \notin C$, 由 C 闭性

$$d = \inf_{z \in C} \|x - z\| > 0$$

取 $z_n \in C$ 使得

$$d \leq \|x - z_n\| \leq d + \frac{1}{n} \tag{3.31}$$

注意到对 $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|z_m - z_n\|^2 &= \|(z_m - x) - (z_n - x)\|^2 \\
&= 2\left(\|z_m - x\|^2 + \|z_n - x\|^2\right) - 4\left\|\frac{z_m - x}{2} + \frac{z_n - x}{2}\right\|^2 (\text{平行四边形}) \\
&= 2\left(\|z_m - x\|^2 + \|z_n - x\|^2\right) - 4\left\|\frac{z_m + z_n}{2} - x\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(d + \frac{1}{n}\right)^2\right) - 4d^2 \to 0 \quad m, n \to \infty
\end{aligned}$$

即 $\{z_n\} \subset C$ 是基本列, 记 $y = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \in C$. 在 (3.31)式中令 $n \to \infty$ 得到

$$d = \inf_{z\in C} \|x - z\| = \|x - y\|$$

(ii) 唯一性: 设 y, y' 满足条件, 则

$$\begin{aligned}
\|y - y'\|^2 &= 2\left(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2\right) - 4\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2 \\
&\leq 4d^2 - 4d^2 = 0
\end{aligned}$$

从而 $y = y'$. □

定理 3.32. $(X, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间, $C \subset X$ 是闭凸集, $x \in X$, 则 y 是 x 在 C 中最佳逼近元 $\iff \mathrm{Re}(x - y, y - z) \geq 0$ 或 $\mathrm{Re}(x - y, z - y) \leq 0, \forall z \in C$.

证明. 对 $\forall z \in C$, 作线段 $z_t = (1 - t)y + tz, t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\|x - z_t\|^2 &= \|(x - y) + t(y - z)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(x - y, y - z) + t^2\|y - z\|^2
\end{aligned} \tag{3.33}$$

令 $\varphi_z(t) = \|x - z_t\|^2$, 则 y 是 x 在 C 中最佳逼近元, 当且仅当

$$\varphi_z(t) \geq \varphi_z(0) \quad (\forall z \in C, \forall t \in [0,1]) \tag{3.34}$$

下只需证 $\mathrm{Re}(x-y, y-z) \geq 0 (\forall z \in C)$ 成立当且仅当 (**3.34**)成立. 由 (**3.33**)知

$$\varphi_z'(0) = 2\,\mathrm{Re}(x-y, y-z)$$

因此, $\mathrm{Re}(x-y, y-z) \geq 0 (\forall z \in C)$ 成立当且仅当 $\varphi_z'(0) \geq 0$, 又因为

$$\varphi_z(t) - \varphi_z(0) = \varphi_z'(0)t + \|y - z\|^2 t^2$$

所以 $\varphi_z'(0) \geq 0$ 成立当且仅当 (**3.34**)成立. 证毕. $\square$

[注记:(1) $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \mid z_k = x_k + \mathrm{i} y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}\}$, 则 $\mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, 是 $\mathbb{R}$ 上 $2n$ 维线性空间. $(z,w) := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 Hermitian 内积. $\langle z, w\rangle := \mathrm{Re}(z,w)$, 则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{C}^n$ 看成 $\mathbb{R}$ 上的实向量空间上的内积.
(2) 给定 $\mathbb{C}$ 上 Hilbert 空间 $(X, (\cdot,\cdot))$, 则 $\langle x, y\rangle := \mathrm{Re}(x,y)$ 是 X 看成 $\mathbb{R}$ 上线性空间时的一个内积. 因此

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

(3)$\mathrm{Re}(x-y, y-z) \geq 0 \Longleftrightarrow$ 向量 $x-y$ 与 $y-z$ 夹角小于 $\frac{\pi}{2}$.]

3.3.2 正交分解

性质 3.35. $(X, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $X_0 \subset X$ 是闭子空间, $x \in X$, y 是 x 在 X_0 中的最佳逼近 $\Longleftrightarrow x - y \perp X_0 - y$. 其中 $X_0 - y := \{z - y \mid z \in X_0\}$ (还是X_0自己)

证明. 设 y 是 x 在 X_0 中最佳逼近元, 则对 $\forall w = z - y, z \in X_0$, 有

$$\mathrm{Re}(x - y, w) \leq 0 \tag{3.36}$$

注意到 $-w \in X_0 - y$, 代入 (3.36)式得

$$\operatorname{Re}(x-y,w) \geq 0 \tag{3.37}$$

由 (3.36)和 (3.37)得

$$\operatorname{Re}(x-y,w)=0, \quad \forall w \in X_0 - y \tag{3.38}$$

再由 X_0 是线性空间, $\mathrm{i}w \in X_0 - y$, 代入 (3.38)式得

$$0=\operatorname{Re}(x-y,\mathrm{i}w)=\operatorname{Im}(x-y,w) \tag{3.39}$$

由 (3.38)和 (3.39)式得 $(x-y,w)=0, \forall w \in X_0 - y = X_0$ □

定理 3.40. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, X_0 是闭子空间, 则对 $\forall x \in X$,

$$x=y+z, y \in X_0, z \in X_0^{\perp}$$

且这种分解唯一, y 称为 x 在 X_0 上的 正交投影.

证明. 对 $\forall x \in X$, 记 y 是 x 在 X_0 中最佳逼近元, 由性质(3.35) , $x-y \perp X_0$, 令 $z=x-y$, 则 $x=y+z, y \in X_0, z \in X_0^{\perp}$. 下证唯一性, 设 $x=y+z=y'+z', y,y' \in X_0, z,z' \in X_0^{\perp}$. 则

$$y-y'=z'-z \in X_0 \cap X_0^{\perp}=\{0\}$$

从而 $y=y', z=z'$. □

[注记: $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, X_0 是闭子空间, 则 $X=X_0 \oplus X_0^{\perp}$.]

3.3.3 正交投影算子

定义 3.41. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 设 X_0 是 X 的一个闭线性子空间, 由正交分解定理, $\forall x \in X, x=y+z, y \in X_0^{\perp}, z \in X_0$. 定义 $P: X \to X_0, x \mapsto Px := z$, 称 P 为 X 到 X_0 的 正交投影算子.

性质 3.42. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $\{0\}\neq X_0\subset X$ 是闭子空间, P 是 X 到 X_0 的正交投影算子. 则有
(1) P 是线性算子
(2) $P\in\mathscr{L}(X,X_0)$ 且 $\|P\|=1$

证明. (1) 线性性: 对 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $x_1,x_2\in X, Px_1=z_1\in X_0, Px_2=z_2\in X_0$.

$$\begin{aligned}\lambda x_1+\mu x_2&=\lambda(Px_1+y_1)+\mu(Px_2+y_2)\\&=(\lambda\cdot Px_1+\mu\cdot Px_2)+(\lambda y_1+\mu y_2)\end{aligned}$$

由正交分解的唯一性, 有

$$P(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda\cdot Px_1+\mu\cdot Px_2$$

即 P 是线性的.
(2) 证明 $\|P\|=1$. 由正交分解, $\forall x\in X$, 有

$$\|x\|^2=\|y\|^2+\|Px\|^2$$

从而 $\|Px\|^2\leq\|x\|^2$, 即 $\|Px\|\leq 1\cdot\|x\|$. 所以 $\|P\|\leq 1$, 又对 $\forall x\in X_0\backslash\{0\}$ 有 $Px=x$, 则 $\dfrac{\|Px\|}{\|x\|}=1$, 从而 $\|P\|=1$. □

3.4 Riesz 表示定理

本节主要介绍 Hilbert 空间中有界线性泛函的 Riesz 表示定理, 以及它在有界共轭双线性型, 测度论中的应用.

3.4.1 Riesz 表示定理

$(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 任给一个 $y\in X$, 定义 $f_y:X\to\mathbb{K}, x\mapsto(x,y)$, 则 f_y 有性质:
1. 线性性
2. 对 $\forall x\in X, |f_y(x)|=|(x,y)|\leq\|y\|\cdot\|x\|$, 所以 $\|f_y(x)\|\leq\|y\|$, 即 $f_y\in X^*$(有界线性泛函全体 $\mathscr{L}(X,\mathbb{K})=X^*$)
3. $\|f_y\|=\|y\|$(特别地, 取 $x=y$)

[注记:Hilbert 空间给定一点, 利用内积得到一个有界线性泛函.]
问题: 给定 Hilbert 空间上一个有界线性泛函 $f \in X^*$, 是否存在 $y \in X$ 使得 $f = f_y$?

定理 3.43. Riesz 表示定理: $(X, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $f \in X^*$, 则存在唯一 $y_0 \in X$, 使得 $f(x) = (x, y_0)$, $\forall x \in X$ 或 $f = f_{y_0}$.

证明. 假设 $f \neq 0$, 记 $M := \{x \in X \mid f(x) = 0\}$. 由 f 的连续性知 $M \subset X$ 是闭子空间, 取 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.
(i) 先证 $X = \mathrm{Span}\{x_0\} \oplus M$.
对 $\forall x \in X$, 有 $x = y+z, y \in M^{\perp}, z \in M$. 注意到 $f(x_0) \neq 0$ 及 $f\left(y - \dfrac{f(y)}{f(x_0)}x_0\right) = 0$, 即

$$y - \frac{f(y)}{f(x_0)}x_0 \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$$

那么 $y = \dfrac{f(y)}{f(x_0)}x_0$, 则 $x = \dfrac{f(y)}{f(x_0)}x_0 + z$. 所以 $X = \mathrm{Span}\{x_0\} \oplus M$.
(ii) 取 $y_0 = \overline{f(x_0)}x_0$, 对 $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{f(y)}{f(x_0)}x_0 + z\right) \\ &= \left(\frac{f(y)}{f(x_0)}x_0 + z, \overline{f(x_0)}x_0\right) \\ &= (x, y_0) \end{aligned}$$

(iii) 唯一性: 设 $\exists y, y'$ 使得对 $\forall x \in X$

$$f(x) = (x, y) = (x, y')$$

从而 $(x, y - y') = 0, \forall x$. 特别地, 取 $x = y - y'$, 有 $\|y - y'\|^2 = 0$, 即 $y = y'$. □

[注记:(1) $\|f_y\| = \|y\|$;(2)Hilbert 空间上的有界线性泛函全体等同于它自身 (指 Hilbert 空间自己). 因为由 (1) 知存在等距同构.]

3.4.2 有界共轭双线性型的表示

定理 3.44. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的共轭双线性型, 满足: $\exists M\geq 0$ 使得对 $\forall x,y\in X$ 有

$$|a(x,y)|\leq M\cdot\|x\|\|y\| \tag{3.45}$$

则存在唯一 $A\in\mathscr{L}(X)$ 使得对 $\forall x,y\in X$ 有

$$a(x,y)=(x,Ay)$$

且

$$\|A\|=\sup_{x,y\in X\setminus\{0\}}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$$

证明. 给定 $y\in X$, 则由 (**3.45**)式知 $a(\cdot,y)\in X^*$, 由 Riesz 表示定理, $\exists z=z(y)$ 使得 $a(\cdot,y)=(\cdot,z)$, 定义: $A:X\to X,y\mapsto Ay=z$.
(i) 先证 A 是线性的. 对 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $y_1,y_2\in X$ 及 $\forall x\in X$

$$\begin{aligned}(x,A(\lambda y_1+\mu y_2))&=a(x,\lambda y_1+\mu y_2)\\&=\overline{\lambda}a(x,y_1)+\overline{\mu}a(x,y_2)\\&=\overline{\lambda}(x,Ay_1)+\overline{\mu}(x,Ay_2)\\&=(x,\lambda Ay_1+\mu Ay_2)\end{aligned}$$

所以

$$(x,A(\lambda y_1+\mu y_2)-\lambda Ay_1-\mu Ay_2)=0$$

由 x 的任意性, $A(\lambda y_1+\mu y_2)=\lambda Ay_1+\mu Ay_2$.
(ii) 唯一性: 若 $\exists A',A$ 使得对 $\forall x,y\in X$, 有

$$(x,A'y)=a(x,y)=(x,Ay)$$

从而 $(x,A'y-Ay)=0$, 由 x 的任意性, $Ay=A'y$.

(iii) 有界性: 由 Riesz 表示定理注记 (1), 有

$$\begin{aligned}\|Ay\| = \|f_{Ay}\| &= \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|(x, Ay)|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|a(x,y)|}{\|x\|} \quad (*) \\ &\le M \cdot \|y\| \quad ((\mathbf{3.45}))\end{aligned}$$

所以有 $\|A\| \le M$, 即 $A \in \mathscr{L}(X)$. 由 $(*)$ 式,

$$\|A\| = \sup_{y\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \sup_{y\in X\setminus\{0\}} \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$$

□

定理 3.46. Lax – Milgram 定理: $(X, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $a(x,y)$ 是 X 上的共轭双线性型. 满足:
(1) $\exists M > 0$ 使得 $|a(x,y)| \le M \cdot \|x\|\|y\|, \forall x, y \in X$
(2) $\exists \delta > 0$ 使得 $|a(x,y)| \ge \delta \|x\|^2, \forall x \in X$.
则存在唯一 $A \in \mathscr{L}(X)$ 使得 $a(x,y) = (x, Ay), \forall x, y \in X$ 且 $A^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, $\|A^{-1}\| \le \dfrac{1}{\delta}$.

证明. A 的存在唯一性由定理(3.44)保证. 下证:
(i) A 是单射
若 $Ay_1 = Ay_2$, 则对 $\forall x \in X$, 有

$$a(x, y_1 - y_2) = (x, Ay_1) - (x, Ay_2) = 0$$

特别地, 取 $x = y_1 - y_2$. 由正定性条件

$$0 = |a(y_1 - y_2, y_1 - y_2)| \ge \delta \|y_1 - y_2\|^2$$

所以 $y_1 = y_2$.
(ii) A 是满射 ($R(A)$ 是闭的,$R(A)^\perp = \{0\}$.)

设 $w \in \overline{R(A)}$, 则 $\exists \{x_n\} \subset X$ 使得 $w = \lim_{n\to\infty} Ax_n$, 注意到 $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\delta\|x_m - x_n\|^2 &\le |a(x_m - x_n, x_m - x_n)| \\ &= |(x_m - x_n, A(x_m - x_n))| \\ &\le \|x_m - x_n\| \cdot \|Ax_m - Ax_n\|\end{aligned}$$

即得

$$\|x_m - x_n\| \le \frac{1}{\delta}\|Ax_m - Ax_n\| \tag{3.47}$$

由于 $w = \lim_{n\to\infty} Ax_n$, 则 $\{Ax_n\} \subset X$ 是基本列, 由 (**3.47**)知 $\{x_n\} \subset X$ 是基本列, 记 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. 于是, 由 A 的连续性, $w = Ax$, 即 $w \in R(A)$, 所以 $R(A)$ 闭.
再证 $R(A)^\perp = \{0\}$, 对 $w \in R(A)^\perp$, 有 $(w, Ax) = 0, x \in X$, 特别取 $x = w$, 有

$$0 = |(w, Aw)| = |a(w, w)| \ge \delta\|w\|^2$$

即得 $w = 0$, 从而 $R(A)^\perp = \{0\}$, 即得 $X = R(A)$,A 是满射.
(iii) 再由 Banach 逆算子定理, $A^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, 下证 $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$. 对 $y \in X$, 有

$$\|y\| \cdot \|Ay\| \ge |(y, Ay)| = |a(y, y)| \ge \delta\|y\|^2$$

所以

$$\|y\| \le \frac{1}{\delta}\|Ay\| \tag{3.48}$$

取 $y = A^{-1}x$, 代入 (**3.48**)式得 $\|A^{-1}x\| \le \frac{1}{\delta}\|x\|$, 即

$$\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}$$

□

3.4.3 Radon-Nikodym 定理

定义 3.49. $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是测度空间, 若存在可测集列 $\{\Omega_n \mid n = 1, 2, \cdot\}$ 使得
(1) $\mu(\Omega_n) < +\infty$
(2) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$
(3) $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$
称 Ω 关于 μ 是 σ-有限的.

定义 3.50. $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$,$(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ 是测度空间, 若对 $\forall E \in \mathscr{B}$ 且 $\mu(E) = 0$, 有 $\nu(E) = 0$, 称 ν 关于 μ 是绝对连续的.

定理 3.51. Radon – Nikodym 定理*:* 设 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu), (\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ 是两个 σ-有限测度, 且 ν 关于 μ 绝对连续, 即

$$E \in \mathscr{B}, \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$$

则存在关于 μ 的可测函数 g, 且 $g(x) \geq 0$ a.e. μ, 使得

$$\nu(E) = \int_E g(x)\,\mathrm{d}\mu, \quad \forall E \in \mathscr{B}$$

证明. (i) 先证 $\mu(\Omega) < +\infty$ 的情形.
注意到 $L^2(\Omega, (\mu+\nu))$ 关于 $(u, v) := \displaystyle\int_\Omega uv\,\mathrm{d}(\mu+\nu)$ 是实 Hilbert 空间. 定义 $f : L^2(\Omega, (\mu+\nu)) \to \mathbb{R}, u \mapsto f(u) := \displaystyle\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu$, 则

$$\begin{aligned}
|f(u)| = \left|\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu\right| &\leq \left(\int_\Omega 1\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\mu(\Omega)|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega,\mu)} \\
&\leq |\mu(\Omega)|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega,\mu+\nu)}
\end{aligned}$$

于是, f 是 $L^2(\Omega, (\mu+\nu))$ 上的一个有界线性泛函, 根据 Riesz 表示定理, 存在

$v \in L^2(\Omega, (\mu+\nu))$, 使得对 $\forall u \in L^2(\Omega, (\mu+\nu))$ 有

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}(\mu+\nu)$$

即

$$\int_\Omega u(1-v)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}\nu \tag{3.52}$$

断言: $0 < v(x) \leq 1$,a.e. μ.
令 $F := \{x \in \Omega \mid v(x) \leq 0\}$, 在 (**3.52**)式中取 $u(x) = \chi_F(x)$,

$$\mu(F) \leq \int_F (1-v)\,\mathrm{d}\mu = \int_F v\,\mathrm{d}\nu \leq 0$$

从而 $\mu(F) = 0$.
同样, 令 $G := \{x \in \Omega \mid v(x) > 1\}$, 在 (**3.52**)式中取 $u(x) = \chi_G(x)$

$$0 \geq \int_G (1-v)\,\mathrm{d}\mu = \int_G v\,\mathrm{d}\nu \geq \nu(G) \geq 0$$

从而 $\displaystyle\int_G (1-v)\,\mathrm{d}\mu = 0$. 又因为 $1 - v(x) < 0, x \in G$. 所以 $\mu(G) = 0$. 因此, $0 < v(x) \leq 1, x \in \Omega$,a.e. μ. 令 $g(x) = \dfrac{1-v(x)}{v(x)}$, 则 $g(x) \geq 0$,a.e. μ, 且 $g(x)$ 关于 μ 可测. 对 $\forall E \in \mathscr{B}$, 在 (**3.52**)式中取 $u = \dfrac{\chi_E(x)}{v(x)+\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$\int_\Omega \chi_E(x)\frac{1-v(x)}{v(x)+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_E(x)\frac{v(x)}{v(x)+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}\nu$$

因为 ν 关于 μ 绝对连续, 且 $v(x) > 0$,a.e. μ, 故 $v(x) > 0$,a.e. ν. 由单调收敛定理, 令 $n \to \infty$ 有

$$\int_E g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_E 1\,\mathrm{d}\nu = \nu(E), E \in \mathscr{B}$$

(ii) 再考虑 $\mu(\Omega) = +\infty$ 的情形.
由 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是 σ 有限的, 取 $\{\Omega_n\} \subset \mathscr{B}$, 使得 $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n, \Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \mu(\Omega_n) < \infty, \forall n \geq 1$. 对 $\forall E \in \mathscr{B}$, 由 (i) 知, 存在 μ 可测函数 $g_n(x) \geq 0$,a.e.

$$\int_{E\cap\Omega_n} g_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \nu(E \cap \Omega_n)$$

且 $g_n(x)=g_{n+1}(x), x\in\Omega_n$, 令 $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}g_n(x)$, 再由单调收敛定理, 令 $n\to\infty$ 有

$$\int_E g(x)\,\mathrm{d}\mu=\int_E \mathrm{d}\nu=\nu(E)$$

□

4 Hahn-Banach 定理 (线性泛函)

本章主要研究线性空间上线性泛函有“多少”, 即一般线性空间特别赋范空间线性泛函的延拓, 即 Hahn-Banach 定理, 以及它的几何形式: 凸集分离.

4.1 Hahn-Banach 定理

本节主要介绍一般线性空间, 赋范空间上线性泛函的延拓.

4.1.1 有限维线性空间上的线性泛函

X 是 $\mathbb{K}$ 线性空间, $\dim X=n<+\infty$, $X^*:=\{f\mid f\text{是}X\text{上的线性函数}\}$.

性质 4.1. $\dim X^*=n$

证明. 取 X 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$, 则 $\forall x\in X,\exists x^k\in\mathbb{K}$, 使得 $x=\sum\limits_{k=1}^n x^k e_k$. 对任意 $1\le k\le n$, 构造 X 上的线性函数 $f^k(e_l)=\delta_{kl},\forall 1\le l\le n$. 对 $\forall f\in X^*, x\in X$, 有

$$\begin{aligned} f(x)=f\left(\sum_{k=1}^n x^k e_k\right)&=\sum_{k=1}^n x^k f(e_k)\\ &=\sum_{k=1}^n f^k(x)f(e_k)\\ &=\left(\sum_{k=1}^n f(e_k)\cdot f^k\right)(x)\end{aligned}$$

由 x 的任意性, $f=\sum\limits_{k=1}^n f(e_k)f^k$. □

[注记: 对 $\forall x,y\in X, x\neq y, \exists f\in X^*$ 使得 $f(x)\neq f(y)$.]

4.1.2 线性空间上线性泛函的延拓

定义 4.2. X 线性空间, $p: X\to\mathbb{R}$, 若 p 满足
(1) $p(\lambda x)=\lambda p(x), \forall\lambda\in\mathbb{R}^+$
(2) $p(x+y)\leq p(x)+p(y), \forall x,y\in X$
称 $p(x)$ 为 X 上的一个 次线性泛函.

性质 4.3. *(1)*$p(x)$ 是凸函数:$\forall t\in[0,1], x,y\in X$ 有

$$p(tx+(1-t)y)\leq tp(x)+(1-t)p(y)$$

(2) f 是 X 上的线性泛函, 对 $\forall x\in X, f(x)\leq p(x)\Longleftrightarrow p'(x):=-p(-x)\leq f(x)\leq p(x)$. [在 $f(x)\leq p(x)$ 中令 $x=-t$ 即得.]

定理 4.4. 实 $\mathrm{Hahn-Banach}$: X 是实线性空间, $X_0\subset X$ 子空间, p 是 X 上次线性泛函, f_0 是 X_0 上的线性泛函且 $f_0(x)\leq p(x), \forall x\in X_0$, 则存在 X 上的线性泛函 f 满足:
(1) $f(x)\leq p(x), \forall x\in X$
(2) $f|_{X_0}=f_0$

证明. (i) 把 f_0 延拓到高 1 维的子空间 X_1 上. 取 $x\in X\backslash X_0$, 构造 $X_1:=X_0\oplus\mathrm{Span}\{x_1\}=\{x+\alpha x_1\mid x\in X_0,\alpha\in\mathbb{R}\}$. 对 $\forall y,z\in X_0$ 有

$$\begin{aligned}f_0(y)-f_0(z)=f_0(y-z)\leq p(y-z)&\\&=p(y-x_1+x_1-z)\leq p(y-x_1)+p(x_1-z)\end{aligned}$$

从而有

$$f_0(y)-p(y-x_1)\leq f_0(z)+p(x_1-z), \forall y,z\in X_0$$

取 $c \in \left[\sup\limits_{y\in X_0}\{f_0(y)-p(y-x_1)\}, \inf\limits_{z\in X_0}\{f_0(z)+p(x_1-z)\}\right]$，作

$$\begin{aligned} f_1 : X_1 = X_0 \oplus \mathrm{Span}\{x_1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x+\alpha x_1 &\longmapsto f_1(x+\alpha x_1) := f_0(x)+\alpha c \end{aligned}$$

则 $f_1|_{X_0} = f_0$. 对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} f_1(x+\alpha x_1) &= f_0(x)+\alpha c \\ &\le f_0(x)+\alpha\left[f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right)+p\left(x_1+\frac{x}{\alpha}\right)\right] \\ &= f_0(x)+f_0(-x)+\alpha p\left(x_1+\frac{x}{\alpha}\right) \\ &= p(x+\alpha x_1) \end{aligned}$$

对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^-$,

$$\begin{aligned} f_1(x+\alpha x_1) &= f_0(x)+\alpha c \\ &\le f_0(x)+\alpha\left[f_0\left(-\frac{x}{\alpha}\right)-p\left(-\frac{x}{\alpha}-x_1\right)\right] \\ &= p(x+\alpha x_1) \end{aligned}$$

即 $f_1(x) \le p(x), \forall x \in X_1$.
(ii) 用 Zorn 引理把 f_0 延拓到 X 上.
记 $\mathscr{F} := \{(\widetilde{f}, \widetilde{X}) \mid X_0 \subseteq \widetilde{X}, \widetilde{f}|_{X_0} = f_0, \widetilde{f}(x) \le p(x), \forall x \in \widetilde{X}\}$. 在 $\mathscr{F}$ 上引入序关系: $(\widetilde{f_1}, \widetilde{X_1}) \preccurlyeq (\widetilde{f_2}, \widetilde{X_2}) \Longleftrightarrow \widetilde{X_1} \subseteq \widetilde{X_2}, \widetilde{f_2}|_{\widetilde{X_1}} = \widetilde{f_1}$. 设 $\mathcal{M} = \{(f_\lambda, X_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是全序子集, 令 $X_{\mathcal{M}} := \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, f_{\mathcal{M}}(x) := f_\lambda(x), x \in X_\lambda$. 则有 $X_0 \subseteq X_{\mathcal{M}}$, 且易知 $f_{\mathcal{M}}$ 定义合理,$f_{\mathcal{M}}(x) \le p(x), \forall x \in X_{\mathcal{M}}$. 因此, $(X_{\mathcal{M}}, f_{\mathcal{M}})$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个上界. 根据 Zorn 引理, $\mathscr{F}$ 存在一个极大元, 记为 (X_Δ, f_Δ), 则 $X_\Delta = X$, 否则由 (i) 的构造方法, $\exists(\widetilde{X_\Delta}, \widetilde{f_\Delta})$ 使得 $X_\Delta \subsetneq \widetilde{X_\Delta}$, $\widetilde{f_\Delta}|_{X_\Delta} = f_\Delta, \widetilde{f_\Delta}(x) \le p(x), \forall x \in \widetilde{X_\Delta}$, 与 (X_Δ, f_Δ) 是极大元矛盾. $\square$

[注记: 定理证明中 c 的取法不唯一, 由此 f_0 的延拓 f 可能也不唯一!]

定理 4.5. 复 Hahn – Banach:X 是复线性空间, $X_0 \subset X$ 是子空间, f_0 是 X_0 上线性泛函, $p(x)$ 是 X 上半范数, 且 $|f_0(x)| \leq p(x), \forall x \in X_0$, 则存在 X 上的线性泛函 f 满足:

(1) $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in X$

(2) $f|_{X_0} = f_0$

证明. 视 X_0, X 为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 令 $g_0(x) = \mathrm{Re}(f_0(x)), \forall x \in X_0$. 则 g_0 是 X_0 作为实线性空间上的实线性泛函, 且 $g_0(x) \leq p(x), \forall x \in X_0$. 根据实 Hahn-Banach 定理, 存在 $g(x)$ 是 X 作为实线性空间上的实线性泛函使得 $g|_{X_0} = g_0$, $g(x) \leq p(x), \forall x \in X$. 令 $f(x) = g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)$, 则 f 满足

(i) 复线性: $f(\mathrm{i}x) = g(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}g(-x) = g(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}g(x) = \mathrm{i}(g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)) = \mathrm{i}f(x)$

(ii)$f|_{X_0} = f_0, \forall x \in X_0$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x) \\ &= \mathrm{Re}(f_0(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(f_0(\mathrm{i}x)) \\ &= \mathrm{Re}(f_0(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}f_0(x)) \\ &= \mathrm{Re}(f_0(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f_0(x)) \\ &= f_0(x) \end{aligned}$$

(iii) $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in X$

对 $\forall x \in X, \exists r_x \geq 0, \theta_x \in [0, 2\pi]$, 使得 $f(x) = r_x e^{\mathrm{i}\theta_x}$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= r_x = e^{-\mathrm{i}\theta_x} f(x) = f(e^{-\mathrm{i}\theta_x} x) \\ &= g(e^{-\mathrm{i}\theta_x} x) \leq p(e^{-\mathrm{i}\theta_x} x) = p(x) \end{aligned}$$

□

4.1.3　赋范空间中泛函的延拓

定理 4.6. Hahn – Banach:X 赋范空间，$X_0 \subset X$ 子空间，$f_0 \in X_0^*$，则存在 $f \in X^*$，使得

(1) $f|_{X_0} = f_0$

(2) $\|f\| = \|f_0\|_0$

其中 $\|f_0\|_0 := \sup\limits_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{|f_0(x)|}{\|x\|}$

证明. 令 $p : X \to \mathbb{K}, x \mapsto \|f_0\|_0\|x\|$，则 p 是 X 上半范数. 根据复 Hahn-Banach 定理，存在 X 上的线性泛函 f 使得 $f|_{X_0} = f_0$，且 $|f(x)| \le p(x), \forall x \in X$. 有

$$|f(x)| \le p(x) = \|f_0\|_0\|x\|, \forall x \in X$$

从而 $\|f\| \le \|f_0\|_0$，又

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \sup_{x \in X_0 \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|_0$$

从而，$\|f\| = \|f_0\|_0$. □

性质 4.7. X 是赋范空间，对 $\forall x, y \in X$，$x \ne y$，则存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) \ne f(y)$.

证明. 令 $z = x - y \ne 0, X_0 = \mathrm{Span}\{z\} = \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$，作

$$\begin{aligned} f_0 : X_0 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda z &\longmapsto \lambda\|z\| = f_0(\lambda z) \end{aligned}$$

则 $f_0 \in X_0^*$，且

$$\|f_0\|_0 = \sup_{\lambda z \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{|f_0(\lambda z)|}{\|\lambda z\|} = 1$$

根据定理 (4.6)，存在 $f \in X^*$，使得 $f|_{X_0} = f_0$ 且 $\|f\| = \|f_0\|_0 = 1$，于是

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = f(z) = f_0(z) = \|z\| \ne 0$$

即 $f(x) \neq f(y)$. $\square$

[注记:(1) 命题说明赋范空间中有界线性泛函“足够多”, 多到可以区分任何不同两点.
(2) 命题的证明有如下事实: X 是赋范空间, $\forall z \in X \backslash\{0\}, \exists f \in X^*$ 使得 $\|f\|=1$, 且 $f(z)=\|z\|$.]

定理 4.8. *X 是赋范空间, $M \subset X$ 是子空间, $x_0 \in X$ 且 $d=\rho(x_0, M)>0$, 则 $\exists f \in X^*$ 使得*
(1) $f|_M \equiv 0$
(2) $f(x_0)=d$
(3) $\|f\|=1$

证明. 令 $X_0=M \oplus \operatorname{Span}\{x_0\}=\{x+\alpha x_0 \mid x \in M, \alpha \in \mathbb{K}\}$. 作

$$\begin{aligned} f_0: X_0 & \longrightarrow \mathbb{K} \\ x+\alpha x_0 & \longmapsto f_0(x+\alpha x_0):=\alpha d \end{aligned}$$

则 $f_0|_M=0, f_0(x_0)=d$, 对 $\forall y=x+\alpha x_0 \in X_0(\alpha \neq 0)$,

$$\begin{aligned} |f_0(y)| & =|\alpha d|=|\alpha| d \\ & \leq|\alpha|\left\|x_0+\frac{x}{\alpha}\right\| \\ & =\|\alpha x_0+x\|=\|y\| \end{aligned}$$

因此有 $\|f_0\|_0 \leq 1$. 取 $\{x_n\} \subset M$ 使得

$$\rho(x_0, x_n)=\|x_0-x_n\| \leq \rho(x_0, M)+\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} d=|f_0(x_0)| & =|f_0(x_0-x_n)| \\ & \leq\|f_0\|_0\|x_0-x_n\| \\ & \leq\|f_0\|_0\left(f+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow+\infty$, 得到 $\|f_0\|_0 \geq 1$. 从而 $\|f_0\|_0=1$. 根据 Hahn-Banach 定理, 存在 $f \in X^*$ 使得 $f|_{X_0}=f_0,\|f\|=\|f_0\|_0=1$. $\square$

推论 4.9. X 是赋范空间, $M \subset X$ 是子集, $x_0 \in X$, 则 $x_0 \in \overline{\mathrm{Span}\{M\}} \Longleftrightarrow$ 对 $\forall f \in X^*$ 且 $f|_M = 0$, 有 $f(x_0) = 0$.

证明. $(\Longrightarrow)$ 显然.
$(\Longleftarrow)$ (反证) 假设 $x_0 \notin \overline{\mathrm{Span}\{M\}}$, 则

$$d = \rho(x_0, \overline{\mathrm{Span}\{M\}}) > 0$$

由定理 (4.8), $\exists f \in X^*$ 使得 $f|_{\overline{\mathrm{Span}\{M\}}} \equiv 0$, 但 $f(x_0) = d \neq 0$, 矛盾. □

4.2 凸集分离

本节介绍 Hahn-Banach 在实线性空间上的几何形式: 凸集分离性.

4.2.1 凸集的 Minkowski 泛函

定义 4.10. X 是线性空间, $C \subset X$ 为子集. 若对 $\forall x, y \in C, t \in [0,1]$ 有 $tx + (1-t)y \in C$, 称 C 是 X 的一个 凸子集.

定义 4.11. X 是线性空间, $C \subset X$ 是凸子集, $0 \in C$, 定义

$$p(x) := \inf\left\{\lambda > 0 \middle| \frac{x}{\lambda} \in C\right\}, \forall x \in X$$

称 $p(x)$ 为凸集 C 的 Minkowski 泛函.

性质 4.12. $p(x)$ 具有性质:
(1) $p(x) \in [0, +\infty], p(0) = 0$
(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \lambda > 0$
(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$
(4) $p(C) \leq 1$
(5) $\forall x_0 \in X \backslash C, p(x_0) \geq 1$

证明. (2)

$$\begin{aligned}
p(\lambda x) := &\inf\left\{\mu>0\,\middle|\,\frac{\lambda x}{\mu}\in C\right\}\\
&=\inf\left\{\mu>0\,\middle|\,\frac{x}{\mu/\lambda}\in C\right\}\\
&=\inf\left\{\lambda\mu'\,\middle|\,\frac{x}{\mu'}\in C\right\}\\
&=\lambda\inf\left\{\mu'\,\middle|\,\frac{x}{\mu'}\in C\right\}\\
&=\lambda p(x)
\end{aligned}$$

(3) 对 $\forall x,y\in X$, 若 $p(x)=+\infty$ 或 $p(y)=+\infty$, 不等式显然成立. 下证 $p(x),p(y)<+\infty$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 记 $\lambda=p(x)+\frac{\varepsilon}{2}$, $\mu=p(y)+\frac{\varepsilon}{2}$, 则 $\frac{x}{\lambda},\frac{\mu}{\lambda}\in C$, 于是

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu}\in C$$

由 $p(x,y)$ 的定义, $p(x+y)\le\lambda+\mu=p(x)+p(y)+\varepsilon$, 令 $\varepsilon\to 0$, 得 $p(x+y)\le p(x)+p(y)$. □

性质 4.13. X 是赋范空间, $C\subset X$ 是凸子集. 若 $0\in\mathring{C}$(0 是 C 的内点), 则 $p(x)$ 是连续的.

证明. 注意到 0 是 C 的内点, $\exists r>0$, 使得 $B_r(0)\subset C$. 于是, 对 $\forall x\in X\backslash\{0\}$, $\frac{rx}{2\|x\|}\in C$, 则 $p(x)\le\frac{2\|x\|}{r}$. 由性质 (4.12) 三角不等式 (3), 有

$$|p(x)-p(y)|\le\max\{p(x-y),p(y-x)\}\le\frac{2\|x-y\|}{r}$$

从而,$p(x)$ 是一致连续的. □

4.2.2 超平面 (极大线性流形)

定义 4.14. X 是线性空间, $M \subset X$ 是子空间. 若对 $\forall x_0 \in X \backslash M$, 有

$$X = M \oplus \operatorname{Span}\{x_0\}$$

称 M 是 X 的一个 极大子空间.

定义 4.15. X 是线性空间, $L \subset X$ 是子集. 若存在 $x_0 \in X$ 及 X 的极大子空间 M 使得

$$L = x_0 + M := \{x_0 + x \mid \forall x \in M\}$$

称 L 是 X 的一个 超平面或 极大线性流形.

定义 4.16. X 是线性子空间, $L \subset X$ 子集, 若 $\exists x_0 \in X, X_0 \subset X$ 子空间使得 $L = x_0 + X_0$, 称 L 是 X 的 线性子流形. 当 X_0 是极大子空间时, L 就是 极大线性子流形.

回顾: $\mathbb{R}^n := \{(x^1, \cdots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{R}\}, \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$
$\mathbb{R}^n$ 中 $n-1$ 维子空间的表示: $\dim M = n-1$,

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \boldsymbol{n}\rangle = 0\}$$

令 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \langle x, \boldsymbol{n}\rangle$, 则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函. $\forall r \in \mathbb{R}$, 记

$$H_f^r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = r\}$$

则超平面 $M = H_f^0$.
$\mathbb{R}^n$ 中超平面的表示: $M' = M + x_0$, 此时 $M' = H_f^r, r = f(x_0)$.
$(*)$ $\mathbb{R}^n$ 中超平面正好是某个线性泛函等值面.

性质 4.17. X 是线性空间, $L \subset X$ 超平面 $\Longleftrightarrow \exists X$ 的线性泛函 $f, r \in \mathbb{K}$, 使得

$$L = H_f^r := \{x \in X \mid f(x) = r\}$$

证明. ($\Longrightarrow$) 设 $L = x_0 + M, M \subset X$ 极大子空间.
(1) 若 $x_0 \in M, L = M$. 由于 M 是极大子空间. $\forall x_1 \in X\backslash M$,

$$X = M \oplus \mathrm{Span}\{x_1\} = \{x + \lambda x_1 \mid x \in M, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

作 $f : X \to \mathbb{K}, x + \lambda x_1 \mapsto f(x + \lambda x_1) := \lambda$, 则 $L = M = H_f^0$.
(2) 若 $x_0 \notin M$, 则 $X = M \oplus \mathrm{Span}\{x_0\} = \{x + \lambda x_0 \mid x \in M, \lambda \in \mathbb{K}\}$, 作 $f : X \to \mathbb{K}, x + \lambda x_0 \mapsto f(x + \lambda x_0) := \lambda$, 则 $f(x_0) = 1, L = x_0 + M = H_f^1$.
($\Longleftarrow$) 先证 H_f^0 是极大子空间. 任取 $x_0 \in X\backslash H_f^0$, 则 $f(x_0) \neq 0$. 对 $\forall x \in X$, 则

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) = 0$$

即 $x - \dfrac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in H_f^0$ 或 $x = y + \dfrac{f(x)}{f(x_0)}x_0, y \in H_f^0$. 因此有

$$X = H_f^0 \oplus \mathrm{Span}\{x_0\}$$

即 H_f^0 是 X 的极大子空间. 此时, $L = H_f^r = \dfrac{rx_0}{f(x_0)} + H_f^0$. □

4.3 凸集分离 (实线性空间)

定义 4.18. X 是实线性空间, $E, F \subset X$ 子集, $L = H_f^r$ 是超平面. 若 $f(E) \leq r \leq f(F)$ 或 $f(F) \leq r \leq f(E)$, 称 超平面 L 分离 E, F .

定理 4.19. X 是实赋范空间, $E \subset X$ 是真凸子集, $0 \in \mathring{E}, x_0 \notin E$, 则存在超平面 $L = H_f^r$ 分离 x_0 与 E.

证明. 设 E 的 Minkowski 泛函为 $p(x)$, 则 $p(E) \leq 1$. 由 $x_0 \in X\backslash E$, 有 $p(x_0) \geq 1$. 令 $X_0 = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. 作 $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}, \lambda x_0 \mapsto f_0(\lambda x_0) := \lambda p(x_0)$. 则
若 $\lambda \geq 0, f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0)$
若 $\lambda < 0, f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) < 0 \leq p(\lambda x_0)$
即对 $\forall x \in X_0, f_0(x) \leq p(x)$. 由实 Hahn-Banach 定理, 存在 X 上的线性泛函 f 使得 $f_0(x) = f(x), \forall x \in X_0$ 且 $f(x) \leq p(x), \forall x \in X$. 于是, 对 $\forall x \in E$ 有

$f(x) \le p(x) \le 1 \le p(x_0) = f_0(x_0) = f(x_0)$, 即 $f(E) \le 1 \le f(x_0)$, 取 $r \in \left[\sup\limits_{x\in E} p(x), p(x_0)\right]$, 则 H_f^r 分离 x_0 与 E. □

[注记:(1) 利用平移, 结论可以推广到含有内点的真凸子集的情形.(2) 由 p 的连续性及 f 的线性得 $f \in X^*$, 因此 $H_f^r \subset X$ 是闭集.]

定理 4.20. X 是实赋范空间, $E_1, E_2 \subset X$ 是凸子集. 若满足
(1) $\mathring{E}_1$ 或 $\mathring{E}_2 \neq \varnothing$
(2) $E_1 \cap E_2 = \varnothing$
则存在超平面 H_f^r 分离 E_1 与 E_2.

证明. 令 $E := E_1 - E_2 := \{x - y \mid x \in E_1, y \in E_2\}$, 则 $E \subset X$ 是凸子集, 且 $\mathring{E} \neq \varnothing$, $0 \notin E$. 由定理 (4.19)和注记 (2), $\exists f \in X^*, s \in \mathbb{R}$ 使得 $f(E) \le s \le f(0) = 0$, 即超平面 H_f^s 分离 E 与 0. 则 $\forall z = x - y \in E, f(x) - f(y) = f(x-y) = f(z) \le s \le f(0) = 0$, 即对 $\forall x \in E_1, y \in E_2$ 有 $f(x) \le f(y)$, 取 $r \in \left[\sup\limits_{x\in E_1} f(x), \sup\limits_{y\in E_2} f(y)\right]$, 则 $f(E_1) \le r \le f(E_2)$, 即 H_f^r 分离 E_1 与 E_2. □

[条件 (2) 可以改为 $\mathring{E}_1 \cap E_2 = \varnothing$ 或 $E_1 \cap \mathring{E}_2 = \varnothing$.]

推论 4.21. Ascoli:X 是实赋范空间, $E \subset X$ 是闭凸子集, 则对 $\forall x_0 \in X \backslash E$, $\exists f \in X^*, r \in \mathbb{R}$ 使得 $f(E) < r < f(x_0)$.

证明. 注意到 $X \backslash E$ 为开集, $\exists \delta > 0$ 使得 $B_\delta(x_0) \subset X \backslash E$. 于是,$B_\delta(x_0) \cap E = \varnothing$, 由定理(4.20), $\exists f \in X^* \backslash \{0\}, s \in \mathbb{R}$ 使得 $f(E) \le s \le f(B_\delta(x_0))$, 即 $\sup\limits_{x\in E} f(x) \le \inf\limits_{y\in B_\delta(x_0)} f(y)$, 下证: $\inf\limits_{y\in B_\delta(x_0)} f(y) < f(x_0)$(反证), 由于 $f \in X^* \backslash \{0\}, \exists y_0 \in B_\delta(x_0)$ 使得 $f(y_0 - x_0) = f(y_0) - f(x_0) \neq 0$. 令

$$y_t = x_0 + t\frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}, t \in (-\delta, \delta)$$

则 $y_t \in B_\delta(x_0)$, 且有

$$f(y_t) = f(x_0) + tf\left(\frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}\right) \tag{4.22}$$

假设 $\inf\limits_{y \in B_\delta(x_0)} f(y) \geq f(x_0)$, 与 (4.22)式矛盾. 取 $r \in \left(\inf\limits_{y \in B_\delta(x_0)} f(y), f(x_0)\right)$, 则 $f(E) < r < f(x_0)$. □

推论 4.23. Mazur: X 是实赋范空间, $E \subset X$ 是闭凸子集, $\mathring{E} \neq \varnothing$, $F \subset X$ 为线性子流形. $\mathring{E} \cap F = \varnothing$, 那么 $\exists$ 超平面 H_f^r 使得 $f(E) \leq r$ 且 $F \subset H_f^r$.

证明. 设 $F = x_0 + M, M \subset X$ 是线性子空间. 那么由定理 (4.20), $\exists f \in X^*, s \in \mathbb{R}$ 使得 $f(E) \leq s \leq f(F)$. 则对 $\forall x \in M$, $s \leq f(x_0 + x) = f(x_0) + f(x)$ 或 $f(x) \geq s - f(x_0)$. 注意到 M 是线性子空间, 则 $-x \in M$, 于是 $f(x) \leq -(s - f(x_0))$. 因此, 对 $\forall x \in M$ 有

$$s - f(x_0) \leq f(x) \leq -(s - f(x_0))$$

从而 $f(x) = 0, \forall x \in M$, 即 $f(M) = 0$. 综上, $f(E) \leq s \leq f(F) = f(x_0 + M) = f(x_0) := r$, 且 $F \subset H_f^r$. □

5 共轭理论

本章主要介绍共轭空间, 共轭算子, 以及与之相关的弱收敛, $*$ 弱收敛, 弱紧性, $*$ 弱紧性.

5.1 共轭空间

本节主要介绍共轭空间, 第二共轭空间和一些基本的例子.

5.1.1 定义

定义 5.1. X 是赋范空间, 称 $X^* := \{f \mid f\text{是}X\text{上有界线性泛函}\}$ 为 X 的 共轭空间 (对偶空间); X^* 的共轭空间 $X^{**} := (X^*)^*$ 称为 X 的 第二共轭空间.

[注记: $X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{K}), X^{**} = \mathscr{L}(X^*, \mathbb{K})$ 是 Banach 空间.]

性质 5.2. X 是赋范空间, 在等距同构意义下, X 是 X^{**} 的子空间.

证明. 作 $J : X \longrightarrow X^{**}, x \longmapsto Jx$. 其中 Jx 定义为: $Jx : X^* \longrightarrow \mathbb{K}, f \longmapsto Jx(f) := f(x)$.
(1) J 是线性的. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in X, f \in X^*$

$$\begin{aligned}(J(\lambda x + \mu y))(f) :&= f(\lambda x + \mu y)\\ &= \lambda f(x) + \mu f(y)\\ &= (\lambda \cdot Jx)(f) + (\mu \cdot Jy)(f)\\ &= [\lambda \cdot Jx + \mu \cdot Jy](f)\end{aligned}$$

由 f 的任意性, $J(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot Jx + \mu \cdot Jy$.
(2) $\|x\|_X = \|Jx\|_{X^{**}}$.
对 $\forall f \in X^*$,

$$|J(x)(f)| = |f(x)| \le \|f\|\|x\|$$

则 $\|Jx\| \le \|x\|$.
对 $\forall x \in X \backslash \{0\}$, 由 Hahn-Banach 定理, $\exists f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$ 且 $f(x) = \|x\|$. 则

$$\|x\| = f(x) \le |f(x)| = |J(x)(f)| \le \|J(x)\|\|f\| = \|Jx\|$$

由 (1),(2) 知 $J : X \longrightarrow X^{**}$ 是等距. □

[注记: (1) 称 J 为 典则映射, 在 J 下, 不区分 x 与 Jx. (2) 若 $X = X^{**}$, 称 X 是 自反空间, Hilbert 空间是自反的.]

5.1.2 例子

例 1: $(L^p[0,1]))^* = L^q[0,1], 1 \le p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$
思路:(1) 对 $\forall g \in L^q[0,1], g$ 可以定义 $L^p[0,1]$ 上的一个线性泛函 F_g.
(2) 对 $\forall F \in (L^p[0,1])^*$, $\exists g \in L^q[0,1]$ 使得 $F = F_g$.

证明. (1) $\forall g \in L^q[0,1]$, g 定义 $L^p[0,1]$ 上的一个有界线性泛函 F_g.
$F_g : L^p[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto F_g(f) := \int_0^1 fg \,\mathrm{d}\mu$. 显然, F_g 是线性的. 又由 Holder 不等式

$$\begin{aligned} |F_g(f)| = \left|\int_0^1 fg\,\mathrm{d}\mu\right| &\le \int_0^1 |fg| \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \left(\int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|g\|_{L^q} \cdot \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

因此, $\|F_g\| \le \|g\|_{L^q}$, 即 $F_g \in (L^p[0,1])^*$.
(2) 要证对 $\forall F \in (L^p[0,1])^*$,$\exists g \in L^p[0,1]$ 使得 $\forall f \in L^p[0,1]$ 有 $F(f) = \int_0^1 fg\,\mathrm{d}\mu$.
定义

$$\chi_t(\tau) := \begin{cases} 1 & \tau \in [0,t] \\ 0 & \tau \in (t,1] \end{cases}$$

于是, $[0,1]$ 上任何简单函数是 $\{\chi_t \mid t \in [0,1]\}$ 的线性组合. $\mathrm{Span}\{\chi_t \mid t \in [0,1]\}$ 在 $L^p[0,1]$ 中稠密,$\forall F \in (L^p[0,1])^*$, 令 $G(t) = F(\chi_t)$, 下证: $g(t) := G'(t)$ 满足要求.
(i) $G(t)$ 绝对连续.

对任意有限个互不相交开区间 $\{\delta_i := (a_i, b_i) \subset [0,1] \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |G(b_i) - G(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (G(b_i) - G(a_i)) \quad \varepsilon_i = \pm 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (F(\chi_{b_i}) - F(\chi_{a_i})) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\chi_{b_i}) - \chi_{a_i}\right) \\
&\leq \|F\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\chi_{b_i} - \chi_{a_i})\right\|_{L^p} = \|F\| \cdot \left(\int_{\bigcup_{i=1}^{n} \delta_i} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|F\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

从而 $G(t)$ 绝对连续, 几乎处处可微. 记 $g(t) := G'(t)$.

(ii) 对简单函数 f 有 $F(f) = \displaystyle\int_0^1 fg \, \mathrm{d}\mu$.

由于 f 是简单函数, $\exists c_i \in \mathbb{R}, 0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2m-1} < a_{2m} \leq 1$ 使得

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\chi_{a_{2i}}(t) - \chi_{a_{2i-1}}(t)\right)$$

于是, 由 F 的线性知

$$\begin{aligned}
F(f) &= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(F(\chi_{a_{2i}}) - F(\chi_{a_{2i-1}})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i (G(a_{2i}) - G(a_{2i-1})) \\
&\xlongequal{\text{绝对连续}} \sum_{i=1}^{m} c_i \int_{a_{2i-1}}^{a_{2i}} 1 \cdot g(t) \, \mathrm{d}\mu = \int_0^1 fg \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(iii) 对有界可测函数 f, 有 $F(f) = \displaystyle\int_0^1 fg \, \mathrm{d}\mu$.

设 f 是有界可测函数, 则 $\exists M > 0$ 及简单函数列 $\{f_n\}$ 使得 $|f|, |f_n| \leq M, f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 由控制收敛定理, $f_n \xrightarrow{L^p} f$. 又由 $F \in (L^p[0,1])^*$, 从而 $F(f) = \lim\limits_{n\to\infty} F(f_n)$. 注意到 $|f_n g| \leq M \cdot |g|, g$ 可积, 再由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n g \, \mathrm{d}\mu = \int_0^1 fg \, \mathrm{d}\mu$$

(iv) $g \in L^q[0,1], 1 < p < \infty$

令 $h_n(t) = \begin{cases} |g|^{q-1}\operatorname{sgn}(g) & |g|^q \le n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 为有界可测函数, 利用 (iii) 得

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_n} h_n g \, \mathrm{d}\mu = F(h_n) \\ \le \|F\| \|h_n\|_{L^p} \\ = \|F\| \left(\int_{E_n} |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

其中 $E_n := \{t \in [0,1] \mid |g(t)|^q \le n\}$. 于是

$$\left(\int_{E_n} |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \le \|F\|$$

令 $n \to \infty$ 得到 $\|g\|_{L^q} \le \|F\|$.

(v) 对任意 $f \in L^p[0,1]$, 有 $F(f) := \int_0^1 fg \, \mathrm{d}\mu$.

注意到有界可测函数在 $L^p[0,1]$ 中稠密, 存在有界可测函数列 $\{f_n\}$, 使得 $f_n \xrightarrow{L^p} f$. 由 F 的连续性,

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n g \, \mathrm{d}\mu = \int_0^1 fg \, \mathrm{d}\mu$$

$\square$

[注记:(1) $p = 1$ 时类似. (2) 对 $\forall 1 < p < +\infty$, $L^p[0,1]$ 是自反的.]

例 2. $(\mathrm{C}[0,1])^* = \mathrm{BV}_0([0,1]) := \{g \mid g(t)\text{是}[0,1]\text{右连续函数}, g(0) = 0, V(g) < +\infty\}$.

5.2 共轭算子

本节主要介绍算子的共轭和一些基本例子.

5.2.1　定义

定义 5.3. X,Y 是赋范空间, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, X^*,Y^* 分别是 X,Y 的共轭空间. 定义: $T^*: Y^* \longrightarrow X^*, f \longmapsto T^*f, T^*f: X \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto (T^*f)(x) := f(Tx)$, 称 T^* 为 T 的 共轭算子.

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \\ X \arrow[u] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

例 1: 有限维空间之间的算子的共轭. $\dim X = n, \dim Y = m$, 则 $\dim X^* = n, \dim Y^* = m$. $X = \operatorname{Span}\{e_1, \cdots, e_n\}, X^* = \operatorname{Span}\{f^1, \cdots, f^n\}, f^i(e_j) = \delta_{ij}, Y = \operatorname{Span}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m\}, Y^* = \operatorname{Span}\{g^1, \cdots, g^m\}, g^i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}, T: X \longrightarrow Y$, 记 $Te_i = \sum\limits_{j=1}^{m} t_i^j \varepsilon_j$, 则 T 在 $\{e_1, \cdots, e_n\}, \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m\}$ 下的矩阵为 (t_i^j), $T^*: Y^* \longrightarrow X^*$,
$T^*g^k \in X^*$, 设 $T^*g^k = \sum\limits_{i=1}^{n} p_l^k f^l, p_l^k$ 待定.

$$(T^*g^k)(e_i) = g^k(Te_i) = g^k\left(t_i^j \varepsilon_j\right) = t_i^j g^k(\varepsilon_j) = t_i^j \delta_{jk} = t_i^k$$

又因为

$$(T^*g^k)(e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_l^k f^l\right)(e_i) = \sum_{l=1}^{n} p_l^k f^l(e_i) = \sum_{l=1}^{n} p_l^k \delta_{li} = p_i^k$$

因此 $p_i^k = t_i^k$.
$(*)$ 有限维情形, 从矩阵的角度来看, 共轭算子所对应的矩阵是原算子对应矩阵的转置!

性质 5.4. $T^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$

证明. (1) T^* 是线性的. $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, f_1,f_2\in Y^*$, 对 $\forall x\in X$ 有

$$\begin{aligned}(T^*(\lambda f_1+\mu f_2))(x) &= (\lambda f_1+\mu f_2)(Tx)\\ &= \lambda f_1(Tx)+\mu f_2(Tx)\\ &= \lambda(T^*f_1)(x)+\mu(T^*f_2))x\\ &= [\lambda\cdot(T^*f_1)+\mu\cdot(T^*f_2)](x)\end{aligned}$$

由 x 的任意性, $T^*(\lambda f_1+\mu f_2)=\lambda\cdot T^*f_1+\mu\cdot T^*f_2$.
(2) $\|T^*\|\le\|T\|$
对 $\forall f\in Y^*, x\in X$

$$|(T^*f)(x)|=|f(Tx)|\le\|f\|\cdot\|Tx\|\le\|f\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|$$

因此 $\|T^*f\|\le\|f\|\cdot\|T\|$, 从而 $\|T^*\|\le\|T\|$, 即 $T^*\in\mathscr{L}(Y^*,X^*)$. □

性质 5.5. 映射 $*:\mathscr{L}(X,Y)\longrightarrow\mathscr{L}(Y^*,X^*), T\longmapsto T^*$ 是等距.

证明. (1) $*$ 是线性的. 对 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, T_1,T_2\in\mathscr{L}(X,Y),\forall x\in X,\forall f\in Y^*$

$$\begin{aligned}[(\lambda T_1+\mu T_2)^*f](x) &= f(\lambda\cdot T_1x+\mu\cdot T_2x)\\ &= \lambda f(T_1x)+\mu f(T_2x)\\ &= \lambda\cdot(T_1^*f)(x)+\mu(T_2^*f)(x)\\ &= [(\lambda T_1^*f+\mu T_2^*f)]x\end{aligned}$$

由 f,x 的任意性, $(\lambda T_1+\mu T_2)^*=\lambda T_1^*+\mu T_2^*$, 即 $*$ 是线性的.
(2) $*$ 是等距, 只需证 $\|T\|\le\|T^*\|$.
不妨设 $T\neq 0$, 则 $\exists x\in X$ 使得 $Tx\neq 0$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f\in Y^*$ 使得 $\|f\|=1, f(Tx)=\|Tx\|_Y$. 于是, 有

$$\|Tx\|_Y=f(Tx)=(T^*f)(x)\le\|T^*f\|\|x\|_X\le\|T^*\|\cdot\|f\|\cdot\|x\|_X=\|T^*\|\cdot\|f\|$$

即 $\|T\|\le\|T^*\|$. 由性质(5.4)知 $*$ 是等距. □

[注记:(1) $T\in\mathscr{L}(X,Y), T^*\in\mathscr{L}(Y^*,X^*), T^{**}\in\mathscr{L}(X^{**},Y^{**})$.(2) 注意到, 在等距的意义下, $X\subset X^{**}, Y\subset Y^{**}$, 那么 T^{**} 可以看成 T 在 X^{**} 中的延拓, 且 $\|T\|=\|T^*\|=\|T^{**}\|$.]

5.2.2 例子

例 1. $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是测度空间, $X = L^2(\Omega, \mu), X^* = X$, 函数 $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto K(x, y)$ 且

$$\int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}\mu_x \,\mathrm{d}\mu_y := M < +\infty$$

对 $\forall u \in L^2$, 定义

$$Tu(x) := \iint_{\Omega} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\mu_y$$

则 (1) $T \in \mathscr{L}(L^2, L^2)$

(2) 对 $\forall u \in (L^2)^* = L^2, (T^*v)(y) = \displaystyle\int_{\Omega} K(x,y)v(x)\,\mathrm{d}\mu_x$

证明. (1) 对 $\forall u \in L^2$ 有

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} |Tu|^2 \,\mathrm{d}\mu_x \\
&= \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\mu_y \right| \mathrm{d}\mu_x \\
&\le \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K(x,y)u(y)| \,\mathrm{d}\mu_y \right)^2 \mathrm{d}\mu_x \\
&\le \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}\mu_y \int_{\Omega} |u(y)|^2 \,\mathrm{d}\mu_y \right) \mathrm{d}\mu_x \quad \text{Holder} \\
&\le M \cdot \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

因此 $\|T\| \le \sqrt{M}$.

(2) 对 $\forall v(x) \in (L^2)^* = L^2, \forall u(y) \in L^2$.

$$\begin{aligned}
(T^*v)(u) &= v(Tu) \\
&= \int_{\Omega} (Tu)(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}\mu_x \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\mu_y \right) v(x)\,\mathrm{d}\mu_x \\
&\xlongequal{\text{Fubini}} \int_{\Omega} u(y) \left(\int_{\Omega} K(x,y)v(x)\,\mathrm{d}\mu_x \right) \mathrm{d}\mu_y \\
&= \left(\int_{\Omega} K(x,y)v(x)\,\mathrm{d}\mu_x \right)(u)
\end{aligned}$$

由 u 的任意性, $T^*v = \int_\Omega K(x,y)v(x)\,\mathrm{d}\mu_x$. $\square$

例 2.(卷积) $K(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 对 $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, 定义卷积: $Tf = (K * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$, 求 T^*.

解. (1) $T \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$, 对任意 $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| &\le \int_{\mathbb{R}} |K(x-y)|^{\frac{1}{q}}\,|K(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} K(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x-y)|\,|f(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{Holder} \\
&= \|K\|_{L^1}^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x-y)|\,|f(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |K * f|^p\,\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}} \|K\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K(x-y)|\,|f(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \|K\|_{L^1}^{\frac{q}{p}} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p \int_{\mathbb{R}} |K(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \|K\|_{L^1}^{\frac{q}{p}} \cdot \|K\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

即 $\|Tf\|_{L^p} \le \|K\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p}$ (Young 不等式). 当 $p = 1$ 或 $+\infty$ 时结论也成立. 因此, $\|T\| \le \|K\|_{L^1}$.

(2) 求 T^*. 对 $\forall f \in (L^p)^* = L^q, g \in L^p$.

$$\begin{aligned}
(T^*f)(g) = f(Tg) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} K(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

由 g 的任意性, $T^*f = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

[注记: $\|K * f\|_{L^p} \le \|K\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p}$ 称为 Young 不等式.]

5.3 弱收敛与 $*$ 弱收敛

本节介绍赋范空间 X 上的弱收敛与其共轭空间 X^* 上的 $*$ 弱收敛, 以及由他们诱导的算子的几种收敛方式.

5.3.1 弱收敛

定义 5.6. X 是赋范空间, $\{x_n\} \subset X, x \in X$. 若对 $\forall f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x)$, 称 $\{x_n\}$弱收敛到 x. x 称为 $\{x_n\}$ 的 弱极限, 记作 $x_n \rightharpoonup x$.

性质 5.7. *(1) 收敛一定是弱收敛.*
(2) 弱极限若存在一定唯一.

证明. X 是赋范空间, $\{x_n\} \subset X, x \in X$.
(1) 设 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, 则 $\|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$. 对 $\forall f \in X^*, |f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$. 即 $f(x_n) \to f(x)$, 从而 $x_n \rightharpoonup x$.
(2) 设 $x_n \rightharpoonup x, x_n \rightharpoonup y$. 对 $\forall f \in X^*, |f(x-y)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y)| \to 0$, 即 $f(x-y) = 0$. 由 f 的任意性, $x = y$. □

性质 5.8. *X 是赋范空间.*
(1) 若 $\dim X = n < +\infty$, 弱收敛也是收敛.
(2) 若 $\dim X = +\infty$, 弱收敛不一定是收敛.

证明. (1) 取 X 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}, X^*$ 的一组基 $\{f^1, \cdots, f^n\}$ 使得 $f^i(e_j) = \delta_{ij}$. 设 $x_n = a_n^i e_i$ 弱收敛于 $x = a^i e_i$. 对任意的 f^k, 有 $f^k(x_n) = a_n^k \to f^k(x) = a^k$, 即 $a_n^k \to a^k, 1 \leq k \leq n$. 于是,

$$\|x_n - x\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| a_n^k - a^k \right| \cdot \|e_k\| \to 0$$

即 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.
(2) 取 $X = L^2[0,1], x_n = \sin(n\pi t)$, 则对 $\forall f \in L^2[0,1] = (L^2[0,1])^*$, 根据 Riemann-Lebesgue 定理, 有

$$\langle f, x_n \rangle = \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t \to 0$$

即 $x_n \rightharpoonup 0$. 但 $\|x_n\|_{L^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $x_n \not\to 0$. □

定义 5.9. X 是线性空间, $A \subset X$ 子集, 称

$$\mathrm{co}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \middle| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in A, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

为集合 A 的 凸包.

[注记: $\mathrm{co}(A), \overline{\mathrm{co}(A)}$ 是凸集.]

定理 5.10. Mazur: X 是赋范空间, $x_n \rightharpoonup x$. 则对 $\varepsilon > 0, \exists x' \in \overline{\mathrm{co}(x_n)}$ 使得 $\|x - x'\| < \varepsilon$.

证明. 注意到 $E := \overline{\mathrm{co}\{x_n\}} \subset X$ 是闭凸子集. 若 $x \in X \backslash E$, 由 Ascoli 定理, $\exists a \in \mathbb{R}, f \in X^*$ 使得 $f(E) < a < f(x)$. 于是, 对任意 n, $f(x_n) < a < f(x)$, 与 $f(x_n) \to f(x)$ 矛盾. □

定理 5.11. X 是赋范空间, $\{x_n\} \subset X, x \in X$, 则 $x_n \rightharpoonup x$ 当且仅当
(1) $\{\|x_n\|\}$ 有界.
(2) 在 X^* 中有稠密子集 M^*, 对 $\forall f \in M^*$ 有 $f(x_n) \to f(x)$.

证明. 在 Banach-Steinhaus 定理中取 $(X, Y) = (X^*, \mathbb{R}), T_n = x_n : X^* \to \mathbb{K}$ 即可. $(x_n \in X^{**})$ □

5.3.2 $*$ 弱收敛

定义 5.12. X 是赋范空间, $\{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$. 若对 $\forall x \in X$, 有 $f_n(x) \to f(x)$, 称 $\{f_n\}*$ 弱收敛于 f. 称 f 是 $\{f_n\}$ 的 $*$ 弱极限. 记 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

性质 5.13. X 是赋范空间, 在 X^* 中, 弱收敛蕴含 $*$ 弱收敛; 当 X 是一个自反空间时, X^* 上的弱收敛与 $*$ 弱收敛等价.

证明. 设 $\{f_n\}\subset X^*, f\in X^*$, 回忆:

$$\{x_n\}\subset X, x\in X, x_n\rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall f\in X^*, f(x_n)\to f(x)$$

$$\{f_n\}\subset X^*, f\in X^*, f_n\rightharpoonup f \Leftrightarrow \forall x^{**}\in X^{**}, x^{**}(f_n)\to x^{**}(f)$$

(1) 若 $f_n\rightharpoonup f$, 则对 $\forall x^{**}\in X^{**}$, 有 $x^{**}(f_n)\to x^{**}(f)$. 特别地, 注意到 $X\subset X^{**}$ [X 可以连续地嵌入 X^{**}] , 取 $x^{**}=x\in X$, 有 $x(f_n):=f_n(x)\to x(f)=f(x)$. 即 $f_n\xrightarrow{w^*}f$.

(2) 由 $X^{**}=X$ 即可. □

定理 5.14. X 是 Banach 空间, $\{f_n\}\subset X^*$, $f\in X^*$, 则 $f_n\xrightarrow{w^*}f$, 当且仅当

(1) $\{\|f_n\|\}$ 有界

(2) 存在 X 的一个稠密子集 M 使得 $f_n(x)\to f(x), \forall x\in M$

证明. 在 Banach-Steinhuas 定理中取 $(X,Y)=(X,\mathbb{K})$, $T_n=f_n$. □

5.3.3 算子的几种收敛方式

定义 5.15. X,Y 是赋范空间, $\{T_n\}\subset\mathscr{L}(X,Y)$, $T\in\mathscr{L}(X,Y)$.

(1) 若 $\|T_n-T\|\to 0$, 称 T_n 一致收敛于 T, 记作 $T_n\rightrightarrows T$

(2) 若对 $\forall x\in X$, 有 $\|T_nx-Tx\|\to 0$, 称 T_n 强收敛于 T, 记作 $T_n\to T$.

(3) 若对 $\forall x\in X, f\in Y^*$ 有 $(T_n^*f)(x)\to(T^*f)(x)$, 称 T_n 弱收敛于 T, 记作 $T_n\rightharpoonup T$.

[注记: 一致收敛 $\Longrightarrow$ 强收敛 $\Longrightarrow$ 弱收敛, 但反过来一般不对.]

- 对 $\forall x\in X, \|T_nx-Tx\|\le\|T_n-T\|\cdot\|x\|\to 0, n\to\infty$, 即 $T_n\to T$, 所以一致收敛 $\Longrightarrow$ 强收敛.

- 对 $\forall f \in Y^*$, $x \in X$

$$\begin{aligned}|(T_n^* f)(x) - (T^* f)(x)| &= |f(T_n x) - f(Tx)| \\ &= |f(T_n x - Tx)| \\ &\leq \|f\| \cdot \|T_n x - Tx\| \to 0\end{aligned}$$

因此强收敛 $\Longrightarrow$ 弱收敛.

例 1. $X = \ell^2, T : \ell^2 \to \ell^2$ $, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto Tx = (x_2, x_3, \cdots)$, $T_n := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n}$, 则 $T_n \to T = 0$, 但 $T_n \not\rightrightarrows 0$.

证明. (1) 对任意 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \ell^2$

$$T_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots), \quad \|T_n x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

即 $T_n \to 0$.
(2) 注意到对 $e_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, 有 $T_n e_{n+1} = e_1$. 于是,

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \geq \frac{\|T_n e_{n+1}\|}{\|e_{n+1}\|} = 1$$

从而 $\|T_n\| \not\to 0$, 即 $T_n \not\rightrightarrows 0$ □

例 2. $X = \ell^2$, $T : \ell^2 \to \ell^2, x \mapsto Tx = (0, x_1, x_2, \cdots)$, $T_n := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n}$, 则 $T_n \rightharpoonup 0$, 但 $T_n \not\to 0$.

证明. (1) 对 $\forall x \in \ell^2, y \in (\ell^2)^* = \ell^2$. $T_n x = (0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots)$,

$$\begin{aligned}(T_n^* y)(x) = y(T_n x) = (T_n x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_{n+k}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_{n+k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, n \to \infty\end{aligned}$$

(2) 注意到 $T_n x = (0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots), \|T_n x\| = \|x\| \not\to 0$. □

5.4 弱列紧性与 $*$ 弱列紧性

本节介绍自反空间中有界集的弱列紧性及可分赋范空间的共轭空间中有界集的 $*$ 弱列紧性.

定义 5.16. *X 是赋范空间,X^* 为共轭空间. $A \subset X, B \subset X^*$.*
(1) 若 A 中任意点列有弱收敛子列, 称 A 是弱列紧的.
(2) 若 B 中任意点列有 $*$ 弱收敛子列, 称 B 是 $*$ 弱列紧的.

5.4.1 可分空间共轭空间中有界列的 $*$ 弱列紧性

定义 5.17. *(X,ρ) 是度量空间, 若存在 X 的可数子集 M 使得 $\overline{M} = X$, 称 X 是可分的.*

定理 5.18. (Banach)*X 是赋范空间, X^* 可分, 则 X 可分.*

证明. (1) $S(X^*) := \{f \in X^* \mid \|f\| = 1\}$ 可分.
由 X^* 的可分性, 则存在 $\{f_n\} \subset X^*$ 稠密. 于是, $\forall f \in S(X^*)$, 存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} f$. 令 $f_n := \dfrac{f_n}{\|f_n\|}$, $g_n \in S(X^*)$, 那么

$$
\begin{aligned}
\|f - g_{n_k}\| &\le \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - g_{n_k}\| = \|f - f_{n_k}\| + \left\| f_{n_k} - \frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|} \right\| \\
&= \|f - f_{n_k}\| + |1 - \|f_{n_k}\|| \\
&\overset{\|f\|=1}{=\!=\!=} |\|f\| - \|f_{n_k}\|| + \|f_{n_k} - f\| \\
&\le 2\|f_{n_k} - f\| \to 0
\end{aligned}
$$

即 $\{g_n\} \subset S(X^*)$ 稠密.
(2) 注意到 $\|g_n\| = 1$, 由算子范数的定义, $\exists x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ 且 $|g_n(x_n)| \ge \dfrac{1}{2}$. 记 $X_0 = \overline{\mathrm{Span}\{x_n\}}$, X_0 可分, $X_0 \subset X$ 闭子空间.
(3) $X_0 = X$.(反证) 假设 $X_0 \ne X$, 取 $x_0 \in X \backslash X_0$, 由 Hahn-Banach 定理, $\exists f \in X^*$

使得 $f|_{X_0}=0, \|f\|=1$. 此时,

$$\|g_n-f\|=\sup_{\|x\|=1}|g_n(x)-f(x)|\geq|g_n(x_n)-f(x_n)|=|g_n(x_n)|\geq\frac{1}{2}$$

与 $\{g_n\}$ 在 $S(X^*)$ 中稠密矛盾. 由于 $\mathrm{Span}\{X_n\}$ 可数, 从而 X 可分. □

定理 5.19. *X 为可分赋范空间, 那么 X^* 中任意有界列 $\{f_n\}$ 有 $*$ 弱收敛的子列.*

证明. 由 X 的可分性, 存在 X 的稠密子集 $M=\{x_m\}$. 对 X^* 中任意的有界列 $\{f_n\}$, 固定 x_m 有

$$|f_n(x_m)|\leq\|f_n\|\cdot\|x_m\|$$

即 $\{f_n(x_m)\mid n=1,2,\cdots\}\subset\mathbb{K}$ 是有界列, 从而有收敛的子列. 由此, 对 x_1, 有 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{1,n}\}$ 使得 $\{f_{1,n}(x_1)\}$ 收敛. 对 x_2, 有 $\{f_{1,n}\}$ 的子列 $\{f_{2,n}\}$ 使得 $\{f_{2,n}(x_2)\}$ 收敛; $\cdots$; 对 x_m 有 $\{f_{m-1,n}\}$ 的子列 $\{f_{m,n}\}$ 使得 $\{f_{m,n}(x_m)\}$ 收敛. 设 $f_{n_k}:=f_{k,k}$, 则 $\forall x_m, f\in M, f_{n_k}(x_m)$ 收敛, 记 $f(x_m)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x_m)$, 则 f 在 $X_0=\mathrm{Span}\{M\}$ 上是线性的. 此外,

$$|f(x_m)|\leq\sup_k|f_{nk}(x_m)|\leq\sup_k\|f_{n_k}\|\cdot\|x_m\|$$

因此 $f\in X_0^*$, 对 f 延拓得 $f:X\to\mathbb{K}$ 有界, 再由 Banach-steinhuas 定理即得. □

5.4.2 自反赋范空间中有界列的弱列紧性

定理 5.20. (Pettis)*: X 是自反赋范空间, $X_0\subset X$ 闭子空间, 则 X_0 自反.*

[注记: 自反有闭遗传性.]

证明. 要证 X_0 自反 $\iff\forall z_0\in X_0^{**},\exists x\in X_0$ 使得 $f(x)=z_0(f),\forall f\in X_0^*$. 作映射 $T:X^*\to X_0^*$, $\widetilde{f}\mapsto T\widetilde{f}=\widetilde{f}|_{X_0}:=f, T\in\mathscr{L}(X^*,X_0^*)$ $[\|T\widetilde{f}\|=\|f\|\leq\|\widetilde{f}\|]$, 则 $T^*\in\mathscr{L}(X_0^{**},X^{**})$. 记 $z=T^*z_0\in X^{**}$, 由 X 的自反性, $\exists x\in X$ 使得

$z(\widetilde{f})=\widetilde{f}(x),\forall\widetilde{f}\in X^*$.
(1) $x\in X_0$.(反证) 假设 $x\in X\backslash X_0$, 由 Hahn-Banach 定理, $\exists\widetilde{f}\in X^*$ 使得 $\|\widetilde{f}\|=1,\widetilde{f}|_{X_0}=0,\widetilde{f}(x)=\rho(x,X_0)>0$. 但

$$0=z_0(T\widetilde{f})=(T^*z_0)(\widetilde{f})=z(\widetilde{f})=\widetilde{f}(x)=\rho(x,X_0)>0$$

矛盾.
(2) $z_0(f)=f(x),\forall f\in X_0^*$.
根据 Hahn-Banach 定理, $\forall f\in X_0^*,\exists\widetilde{f}\in X^*$, 使得 $\widetilde{f}|_{X_0}=f$, 所以 $f(x)=\widetilde{f}(x)=z(\widetilde{f})=(T^*z_0)(\widetilde{f})=z_0(T\widetilde{f})=z_0(f)$. □

定理 5.21. Eblein – Smulian:X 是自反空间, X 中有界列有弱收敛的子列.

证明. 设 $\{x_n\}\subset X$ 有界列, 记 $X_0=\overline{\mathrm{Span}\{x_n\}}$, 则 $X_0\subset X$ 可分的闭子空间.
(1) X_0^*,X_0^{**} 可分的.
注意到 $X_0\subset X$ 闭, X 自反, 由定理 (5.20)知 X_0 是自反的, 即 $X_0=X_0^{**}$. 再由 X_0 的可分性知 X_0^{**} 是可分的, 从而 X_0^* 是可分的.(定理(5.18))
(2) $\{x_n\}$ 有弱收敛的子列.
注意 $X_0=X_0^{**}$, 那么对 $\{x_n\},\exists\{g_n\}\subset X_0^{**}$ 使得对 $\forall f\in X_0^*$ 有 $g_n(f)=f(x_n),\|g_n\|=\|x_n\|,\forall n$. 因此 $\{g_n\}\subset X_0^{**}$ 为有界列. 根据定理(5.19)知, $\{g_n\}$ 有 $*$ 弱收敛的子列 $\{g_{n_k}\}$, 即 $\exists g\in X_0^{**}$ 使得 $g_{n_k}(f)\to g(f),\forall f\in X_0^*$, 再由 $X_0=X_0^{**}$, $\exists x\in X_0$ 使得对 $\forall f\in X_0^*$ 有 $g(f)=f(x)$. 下证 $x_{n_k}\rightharpoonup x$, 对 $\forall\widetilde{f}\in X^*$,

$$\widetilde{f}(x_{n_k})=\widetilde{f}|_{X_0}(x_{n_k})=f(x_{n_k})=g_{n_k}(f)\to g(f)=f(x)=\widetilde{f}(x)$$

□

6　谱理论

本章介绍 Banach 空间算子的谱理论, 特别是紧算子的谱理论以及 Fredholm 算子的基本性质.

6.1 算子的谱

主要介绍闭算子的谱的定义, 谱的存在性及谱半径的估计.

回忆:X 是 $\mathbb{C}$ 上线性空间, $\dim X = n < +\infty$, $\mathscr{A}: X \to X$ 是线性变换. 任意给定 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有

- $\ker(\lambda I - \mathscr{A}) = \{0\} \Longleftrightarrow R(\lambda I - \mathscr{A}) = X \Longleftrightarrow (\lambda I - \mathscr{A})^{-1}$ 存在.
- $\ker(\lambda I - \mathscr{A}) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \exists 0 \neq \alpha \in X$ 使得 $\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$, 即 λ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值.

$(*)$ $\dim X < +\infty$, 特征值, 特征向量一定存在.

问题:X 是 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(X)$, 给定 $\lambda \in \mathbb{C}$

(1) $\ker(\lambda I - A) = \{0\} \Longrightarrow$ 可定义 $(\lambda I - A)$ 的逆 $(\lambda I - A)^{-1}$, $R(\lambda I - A)$ 是否等于 X? $\overline{R(\lambda I - A)}$ 是否等于 X?

(2) $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\} \implies \exists 0 \neq x \in X$ 使得 $Ax = \lambda x$, 即 λ 为 A 的特征值.

6.1.1 谱的定义

$$R(\lambda I - A) := \{(\lambda I - A)x \mid x \in D\}, \lambda \in \mathbb{C}$$

定义 6.1. X 是 Banach 空间, $D \subset X$ 是子空间, $A : D \to X$ 是闭算子.

(1) 若 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, $R(\lambda I - A) = X$, 称 λ 为 A 的 正则值. 所有正则值的全体记为 $\rho(A)$.

(2) 若 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, $R(\lambda I - A) \neq X$, 但 $\overline{R(\lambda I - A)} = X$, 称 λ 为 A 的 连续谱. 全体连续谱记为 $\sigma_c(A)$.

(3) 若 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$, 称 λ 为 A 的 剩余谱. 全体剩余谱的集合记为 $\sigma_r(A)$.

(4) 若 $(\lambda I - A)^{-1}$ 不存在, 称 λ 为 A 的 点谱. 点谱全体构成的集合记为 $\sigma_p(A)$.

[注记:(1) 当 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 则 $\exists 0 \neq x \in X$ 使得 $Ax = \lambda x$. 此时 λ 也称为 A 的 特征值. x 称为 属于 λ 的特征向量.(2) 称 $\sigma(A) := \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$ 为 A 的 谱集. (3) $\rho(A) = \mathbb{C} \backslash \sigma(A)$.(4) 上述三种谱都可能存在.]

例 1. $X = L^2[0,1], D = \{u \in C^2[0,1] \mid u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)\}, A : D \to X, u(t) \mapsto Au := -u''(t)$, 则 $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{(2n\pi)^2 \mid n = 0, 1, \cdots\}$

证明. (1) A 是闭算子. (?)
(2) $\{(2n\pi)^2 \mid n=0,1,\cdots\} \subset \sigma_p(A)$, 对 $u\in D, \lambda\in\mathbb{C}, (\lambda I-A)u=\lambda u+u''(t)$, 注意到 $u_n=\cos(2n\pi t)$ 或 $\sin(2n\pi t)$,

$$\left[(2n\pi)^2 I-A\right]u_n=(2n\pi)^2 u_n+\left[-(2n\pi)^2\right]u_n=0$$

即 $\lambda_n:=(2n\pi)^2\in\sigma_p(A)$.
(3) $\forall\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{(2n\pi)^2 \mid n=0,1,\cdots\}$ 是正则值. 要证 $\forall f\in L^2[0,1], \exists u\in D$ 使得 $(\lambda I-A)u=f$

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2n\pi \mathrm{i} t}$$

其中 $c_n:=\int_0^1 f(t)e^{-2n\pi \mathrm{i} t}\,\mathrm{d}t$, 设 $u=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2n\pi \mathrm{i} t}$, a_n 待定, 代入 $(\lambda I-A)u=f$ 得

$$a_n=\frac{c_n}{\lambda-(2n\pi)^2}$$

则可证 $u=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_n}{\lambda-(2n\pi)^2}e^{2n\pi \mathrm{i} t}\in D$, 并且

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2}^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|c_n|^2}{|\lambda-(2n\pi)^2|^2} &\le \sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\lambda-(2n\pi)^2|^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\\ &=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\lambda-(2n\pi)^2|^2}\|f\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

□

例 2. $X=C[0,1], A: X\to X, u(t)\mapsto Au=t\cdot u(t)$, 则 $\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1]$.

证明. (1) $\mathbb{C}\backslash[0,1]\subseteq\rho(A)(\rho(A)=\mathbb{C}\backslash[0,1])$.
对 $\forall\lambda\in\mathbb{C}\backslash[0,1], u\in X$, $(\lambda I-A)u=(\lambda-A)u(t)$, 注意到 $\lambda\in\mathbb{C}\backslash[0,1], v(t):=\frac{1}{\lambda-t}u(t)\in X$, 且 $(\lambda I-A)v(t)=u(t)$, 此外 $(\lambda I-A)u=(\lambda-t)u(t)=0\iff u(t)=0$, 即 $\ker(\lambda I-A)=\{0\}$. 因此, $\mathbb{C}\backslash[0,1]\subset\rho(A)$.
(2) $[0,1]\subset\sigma_r(A)$. 对 $\forall\lambda\in[0,1], (\lambda I-A)v(t)=(\lambda-t)v(t):=u(t)$, 从而对 $\forall u(t)\in R(\lambda I-A)$ 有 $u(\lambda)=0$, 于是 $1\notin\overline{R(\lambda I-A)}$, 即 $\overline{(\lambda I-A)}\neq X$.
综合 (1), (2), $\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1]$. □

例 3. $X=L^2[0,1], A: X\to X, u(t)\mapsto Au=tu(t)$, 则 $\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1]$.

证明. (1) $\mathbb{C}\backslash[0,1]\subset\rho(A)$. 对 $\forall\lambda\in\mathbb{C}\backslash[0,1], v(t)\in X, (\alpha I-A)v(t)=(\lambda-t)v(t)$, 于是 $\ker(\lambda I-A)=\{0\}$, 即 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在. 对 $\forall u\in X$, 取 $v=\dfrac{1}{\lambda-t}u(t)\in L^2[0,1]$, 且 $(\alpha I-A)v=u$.
(2) $[0,1]\subset\sigma_c(A)$. $\forall\lambda\in[0,1], v(t)\in X, (\lambda I-A)v(t)=(\lambda-t)v(t)$. 注意到 $\dfrac{1}{\lambda-t}\notin L^2[0,1]$, 从而 $1\notin R(\lambda I-A)$. 即 $R(\lambda I-A)\neq X$. 下证 $\overline{R(\lambda I-A)}=X$. 对 $\forall u\in L^2[0,1]$, 对充分小 $\varepsilon>0$, 记 $E_\varepsilon=[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$, 令 $u_\varepsilon=\dfrac{1}{\lambda-t}\chi_{E_\varepsilon}u$,

$$(\lambda I-A)u_\varepsilon=\chi_{E_\varepsilon}u\xrightarrow{L^2}u,\quad \text{a.s.}\varepsilon\to 0$$

即 $\overline{R(\lambda I-A)}=X$. □

6.1.2 谱的存在性

定义 6.2. X 是 Banach 空间, $A\in\mathscr{L}(X)$, 定义 $R:\rho(A)\to\mathscr{L}(X),\lambda\mapsto R(\lambda)=R_\lambda(A):=(\lambda I-A)^{-1}$, 称 $R_\lambda(A)$ 为 A 的预解式.

性质 6.3. $T\in\mathscr{L}(X)$, 若 $\|T\|<1$, 则有 $(I-T)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$ 且

$$\|(I-T)^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\|T\|}$$

证明. (1) $(I-T)^{-1}$ 存在.
任给 $y\in X$, 作 $S: X\to X, x\mapsto y+Tx$. 对 $\forall x_1,x_2\in X$, 有

$$\|Sx_1-Sx_2\|=\|Tx_1-Tx_2\|\leq\|T\|\|x_1-x_2\|$$

即 S 是 X 上的压缩映射. 那么, 存在唯一 $x\in X$ 使得 $Sx=x$ 或 $y=(I-T)x$, 即 $(I-T)^{-1}$ 存在.
(2) $\|I-T\|^{-1}\leq\dfrac{1}{1-\|T\|}$.

由 $\|y\| = \|(I-T)x\| \geq \|x\| - \|T\|\|x\| = (1-\|T\|)\|x\|$ 得 $\|x\| \leq \dfrac{1}{1-\|T\|}\|y\|$. 即 $\|(I-T)^{-1}y\| \leq \dfrac{1}{1-\|T\|}\|y\|$, 因此 $\|I-T\|^{-1} \leq \dfrac{1}{1-\|T\|}$. □

[注记:(1) $x = \lim\limits_{k\to\infty} S^k y = \lim\limits_{k\to\infty}(y + Ty + T^2y + \cdots + T^k y) = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{l=0}^{k} T^l y = \sum\limits_{l=0}^{\infty} T^l y = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k\right) y$. 因此

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

(2) $\lambda \in \rho(A)$, 则有 $(\lambda I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{\lambda^{k+1}}, \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \left\|\dfrac{1}{\lambda}\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\| = \dfrac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{|\lambda|\left(1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)} = \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|}$.]

性质 6.4. $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ 是开集.

证明. 即证明 $\forall \lambda_0 \in \rho(A), \exists \delta > 0$, 使得对 $\forall \lambda \in B_\delta(\lambda_0)$, 有 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, 注意到 $\lambda I - A = (\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A) = (\lambda_0 I - A)\left[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}\right]$, 记 $T := -(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}$, 当 $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^{-1}$ 时, $\|T\| = |\lambda - \lambda_0|\,\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| < 1$, 根据性质 (6.3), $I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, 于是, 取 $\delta < \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^{-1}$ 时, 对 $\forall \lambda \in B_\delta(\lambda_0)$, 有 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. □

[注记: 记 $B = I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}$, 则

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = [(\lambda_0 I - A)B]^{-1} = B^{-1} R_{\lambda_0}(A)$$

$\|R_\lambda(A)\| \leq \|R_{\lambda_0}(A)\| \cdot \|B^{-1}\| \leq \dfrac{\|R_{\lambda_0}(A)\|}{1 - \|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)\|}$]

定理 6.5. $R_\lambda(A)$ 关于 λ 是 $\rho(A)$ 上的解析函数.

证明. (1) 第一预解公式, 对 $\forall\lambda,\mu\in\rho(A)$,

$$\begin{aligned}R_\lambda(A) &= R_\lambda(A)(\mu I-A)R_\mu(A)\\ &= R_\lambda(A)\left[(\lambda I-A)+(\mu-\lambda)I\right]R_\mu(A)\\ &= R_\mu(A)+(\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)\end{aligned}$$

因此得到了 第一预解公式: $R_\lambda(A)-R_\mu(A)=(\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.
(2) $R_\lambda(A)$ 关于 λ 连续.
给定 $\lambda_0\in\rho(A)$, 对 $\forall\lambda\in\rho(A)$,

$$R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)=(\lambda_0-\lambda)R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A)$$

由性质 (6.4)的注记, 当 $|\lambda-\lambda_0|\le\dfrac{1}{2}\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\|^{-1}$ 时,

$$\|R_\lambda(A)\|\le\frac{\|R_{\lambda_0}(A)\|}{1-\frac{1}{2}}\le 2\|R_{\lambda_0}(A)\|$$

于是, $\|R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)\|\le|\lambda-\lambda_0|\cdot 2\|R_{\lambda_0}(A)\|^2$, 即 $R_\lambda(A)$ 关于 λ 连续.
(3) $R_\lambda(A)$ 关于 λ 可微.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0}=\lim_{\lambda\to\lambda_0}-\frac{(\lambda-\lambda_0)R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0}=-R_{\lambda_0}(A)^2$$

□

定理 6.6. *谱的存在性: X 是 Banach 空间, $A\in\mathscr{L}(X)$, 则 $\sigma(A)\neq\varnothing$.*

证明. 反证, 假设 $\sigma(A)=\varnothing$, 则 $\rho(A)=\mathbb{C}$.
(1) $R_\lambda(A)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界. 当 $|\lambda|>2\|A\|$ 时, $\left\|\dfrac{A}{\lambda}\right\|<1$. 根据性质 (6.3),

$$\|R_\lambda(A)\|=\|(\lambda I-A)^{-1}\|\le\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}\le\frac{1}{\|A\|}$$

另一方面, $R_\lambda(A)$ 在 $\overline{B_{2\|A\|}(0)}$ 上是连续的, 从而 $\|R_\lambda(A)\|$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界.
(2) $R_\lambda(A)$ 与 λ 无关, 与第一预解公式矛盾. 注意到 $R_\lambda(A)$ 在 $\mathbb{C}$ 上关于 λ 解析. 则对 $\forall f\in\mathscr{L}(X)^*$, $F(\lambda):=f(R_\lambda(A))$ 是 $\mathbb{C}$ 上解析函数. 又由 (1) 知, $R_\lambda(A)$ 有界, 从而 $f(R_\lambda(A))$ 是 $\mathbb{C}$ 上有界函数, 根据 Liouville 定理, $F(\lambda)$ 为常数 (与 f 有关) . 由 Hahn-Banach 定理, $R_\lambda(A)$ 与 λ 无关, 与第一预解公式矛盾. □

6.1.3 谱半径估计

定义 6.7. X 是 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(X)$, 称 $r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ 为 A 的 谱半径.

定理 6.8. Gelfand:X 是 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(X)$, 则

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

证明. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, 记 $r = \inf\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, 则 $\liminf\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geq r$. 下证 $\limsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ 使得 $\|A^m\|^{\frac{1}{m}} \leq r + \varepsilon$. 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $n = mp_n + q_n, 0 \leq q_n < m$. 于是,

$$\begin{aligned}
\|A^n\|^{\frac{1}{n}} &= \|A^{mp_n+q_n}\|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \|A^{mp_n}\|^{\frac{1}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q_n}{n}} \\
&\leq \|A^m\|^{\frac{p_n}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q_n}{n}} \\
&\leq (r+\varepsilon)^{\frac{mp_n}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q_n}{n}}
\end{aligned}$$

取上极限及 ε 的任意性知

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$$

(2) $r_\sigma(A) \leq r := \inf\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\| z^n$ 的收敛半径为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}}$. 所以, 当 $|\lambda| > r$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ 收敛.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda(A)$$

且 $\|R_\lambda(A)\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|}$, 即 $r_\sigma(A) \leq r$.

(3) $r_\sigma(A) \geq r := \inf\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

根据 $r_\sigma(A)$ 的定义, 当 $|\lambda| < r_\sigma(A)$ 时, $\lambda \in \rho(A)$. 由 $R_\lambda(A)$ 在 $\rho(A)$ 上解析,

$\forall f \in \mathscr{L}(X)^*$, $f(R_\lambda(A))$ 是 $\rho(A)$ 上的解析函数, 且 $f(R_\lambda(A)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}$. 因此, $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(A^n)|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}} < +\infty$$

于是, $\exists M > 0$, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{|f(A^n)|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}} < M$$

其中 M 是依赖于 f 的. 由共鸣定理, $\exists M > 0$ 使得 $\frac{\|A^n\|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}} \leq M$.

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} (r_\sigma(A)+\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}}$$

令 $n \to \infty$ 有

$$r = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r_\sigma(A) + \varepsilon$$

由 ε 的任意性, $r \leq r_\sigma(A)$. □

[注记:$r = \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$.]

6.1.4 例子

例 1. $A : \ell^2 \to \ell^2, x = (x_1, x_2, \cdots) \mapsto Ax = (0, x_1, x_2, \cdots)$, 求证: $\sigma_p = \varnothing, \sigma_c(A) = S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}, \sigma_r(A) = D^2 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$.

证明. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A)x = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \cdots, \lambda x_{n+1} - x_n, \cdots)$. 注意到 $\|A\| = 1$, 由 Gelfand 定理知 $r_\sigma(A) \leq 1$.
(1) $\sigma_p(A) = \varnothing$.
若 $(\lambda I - A)x = 0 \Longleftrightarrow \lambda x_1 = 0, \lambda x_{n+1} = x_n \Longleftrightarrow x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 即 $\sigma_p(A) = \varnothing$.
(2) $\sigma_c(A) = S^1$.
对 $\forall \lambda \in S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. 由 (1) 的证明, $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$, 即 $\lambda I - A$ 是单射. 下证: $R(\lambda I - A) \neq \ell^2$, 但 $\overline{R(\lambda I - A)} = \ell^2$. 记 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, 若 $(\lambda I - A)x = e_1$, 则 $\lambda x_1 = 1, \lambda x_{n+1} = x_n$, 由 $\lambda \in S^1, x = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}, \cdots\right) \notin \ell^2$, 即 $e_1 \notin R(\lambda I - A)$. 对 $\forall y \in R(\lambda I - A)^\perp$, 则 $((\lambda I - A)e_n, y) = 0, \forall n \Longrightarrow$

$(\lambda e_n - e_{n+1}, y) = 0 \Longrightarrow \lambda\overline{y_n} - \overline{y_{n+1}} = 0 \Longrightarrow |y_n| = |y_{n+1}|$, 由 $y \in \ell^2$ 知 $y_n = 0$, 即 $y = 0, R(\lambda I - A)^{\perp} = \{0\}$. 又 $\overline{R(\lambda I - A)}^{\perp} \subset R(\lambda I - A)^{\perp} = \{0\}$, 即 $\overline{R(\lambda I - A)} = X$(正交分解保证).

(3) $\sigma_r(A) = D^2 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$.

对 $\lambda \in D^2, |\lambda| < 1$, 则 $z = (1, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}^2, \cdots) \in \ell^2$, 对 $\forall x \in \ell^2, ((\lambda I - A)x, z) = \lambda x_1 + \lambda(\lambda x_2 - x_1) + \lambda^2(\lambda x_3 - x_2) + \cdots + \lambda^n(\lambda x_{n+1} - x_n) + \cdots = 0$, 即 $z \in \overline{R(\lambda I - A)}^{\perp}$, 从而 $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$. □

定义 6.9. $(X, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间,$A \in \mathscr{L}(X)$.

(1) 若 $\forall x, y \in X$, 有 $(Ax, y) = (x, Ay)$, 称 A 是 对称算子.

(2) 若对 $\forall x, y \in X$, 有 $(Ax, Ay) = (x, y)$ 且 $R(A) = X$, 称 A 是 X 上 酉算子.

例 2. $(X, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间, A 是 X 上对称算子, 则 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ 且 $\sigma_r(A) = \varnothing$.

证明. 对 $\lambda = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \forall x \in X$ 有

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)x\|^2 &= ((aI - A)x + \mathrm{i}bx, (aI - A)x + \mathrm{i}bx) \\ &= \|(aI - A)x\|^2 - \mathrm{i}\,((aI - A)x, bx) + \mathrm{i}(bx, (aI - A)x) + b^2\|x\|^2 \\ &= \|(aI - A)x\|^2 + b^2\|x\|^2\end{aligned}$$

因此, 当 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \ker(\lambda I - A) = \{0\}$.

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \lambda \in \rho(A) (\Longleftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R})$.

根据 Banach 逆算子定理, 等价证明 $\lambda I - A$ 是满射.

(i) $R(\lambda I - A) = \overline{R(\lambda I - A)}$. $\forall x_n \subset X$ 使得 $(\lambda I - A)x_n \to y \in X$, 由 $\|(\lambda I - A)(x_m - x_n)\|^2 \geq b^2\|x_m - x_n\|^2$ 知 $\{x_n\} \subset X$ 是基本列, 记 $x_n \to x$, 于是 $(\lambda I - A)x_n \to (\lambda I - A)x = y$.

(ii) $R(\lambda I - A)^{\perp} = \{0\} \Longleftrightarrow \lambda I - A$ 满. $\forall y \in R(\lambda I - A)^{\perp}$, 则对 $\forall x \in X$, 有

$$((\lambda I - A)x, y) = (x, \overline{\lambda}y - Ay) = (x, (\overline{\lambda}I - A)y) = 0$$

由 x 的任意性知, $(\overline{\lambda}I - A)y = 0$, 即 $y \in \ker(\overline{\lambda}I - A) = \{0\}$, 即 $y = 0$. 从而 $R(\lambda I - A)^{\perp} = \{0\}$.

(2) $\sigma_r(A)=\varnothing$.
对 $\forall\lambda\in\sigma_r(A)\subset\sigma(A)\subset\mathbb{R}$, 则 $\ker(\lambda I-A)=\{0\}$. $R(\lambda I-A)^{\perp}=\ker(\overline{\lambda}I-A)=\ker(\lambda I-A)=\{0\}$.

$$R(\lambda I-A)^{\perp}=\ker(\overline{\lambda}I-A)=\ker(\lambda I-A)=\{0\}$$

因此 $\overline{R(\lambda I-A)}^{\perp}\subset R(\lambda I-A)^{\perp}=\{0\}$, 即 $\overline{R(\lambda I-A)}=X$, 矛盾. 即 λ 不存在. □

例 3. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, A 是 X 上酉算子, 则 $\sigma(A)\subset S^1,\sigma_r(A)=\varnothing$.

证明. 注意到 $\forall x\in X,\|Ax\|^2=\|x\|^2$, 则 $\|A\|=1$, 且 A 是单射, 又 A 是满射. 由 Banach 逆算子定理, $A^{-1}\in\mathscr{L}(X)$ 且 $\|A^{-1}\|=1$.
(1) $\sigma(A)\subset S^1$.
根据 Gelfand 定理, $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|\le1\}$, 下证 $\sigma(A)\subset S^1$. 对 $\forall\lambda,|\lambda|<1,\|\lambda A^{-1}\|=|\lambda|\cdot\|A^{-1}\|<1$, $(\lambda I-A)=-A(I-\lambda A^{-1})$, 由性质 (6.3)知, $(I-\lambda A^{-1})^{-1}\in\mathscr{L}(X)$. 于是, $(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$.
(2) $\sigma_r(A)=\varnothing$.
若 $\lambda\in\sigma_r(A)\subset S^1$, 则 $\ker(\lambda I-A)=\{0\}$. 对 $\forall x,y$ 有 $((\lambda I-A)x,y)=(x,(\overline{\lambda}I-A^{-1})y)$. 由此, $R(\lambda I-A)^{\perp}=\ker(\overline{\lambda}I-A^{-1})=\ker(\lambda I-A)=\{0\}$, 即有 $\overline{R(\lambda I-A)}^{\perp}\subset R(\lambda I-A)^{\perp}=\{0\}$, 因此 $\overline{R(\lambda I-A)}=X$, 与 λ 是剩余谱矛盾. [$\ker(\overline{\lambda}I-A^{-1})=\ker(\lambda I-A)$ 因为 $(\overline{\lambda}I-A^{-1})x=0\iff\overline{\lambda}x=A^{-1}x\iff\overline{\lambda}Ax=x\iff\lambda\overline{\lambda}Ax=\lambda x\iff Ax=\lambda x$] . □

6.2 紧算子

本节主要介绍 Banach 空间的一类重要算子: 紧算子, 并说明它与全连续算子, 有限秩算子的关系.

6.2.1 定义

定义 6.10. X,Y 是 Banach 空间, $A:X\to Y$ 线性算子. $B_1(X)$ 是 X 中单位球. 若 $\overline{A(B_1(X))}\subset Y$ 紧, 则称 A 是紧算子 (Compact operator), 所有紧算子全体记为 $\mathfrak{C}(X,Y),\mathfrak{C}(X):=\mathfrak{C}(X,X)$.

[注记: (1) A 紧算子 $\Longleftrightarrow$ 对 X 中任意有界集 M 有 $\overline{A(M)} \subset Y$ 紧 $\Longleftrightarrow$ 对 X 中任意有界列 $\{x_n\}, \{Ax_n\}$ 中有收敛的子列.
(2) $A, B \in \mathfrak{C}(X, Y), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 则 $\alpha A + \beta B \in \mathfrak{C}(X, Y)$.
(3) $X_0 \subset X$ 闭子空间, $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 则 $A|_{X_0} \in \mathfrak{C}(X_0, Y)$.
(4) $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 则 $R(A)$ 是可分的.
(5) $A \in \mathscr{L}(X, Y), B \in \mathfrak{C}(Y, Z)$, 则 $BA \in \mathfrak{C}(X, Z)$.]
例: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 紧, $X = C(\Omega)$, $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ 连续, $T : X \to X, u \mapsto Tu := \int_\Omega K(x, y)u(y)\, \mathrm{d}y$, 则 T 是紧算子.

证明. 记 $B_1(X)$ 是 X 中的单位球, 下证 $\overline{TB_1(X)} \subset X$ 是紧的. 根据 Arzela-Ascoli 定理, 只要证 $\overline{TB_1(X)}$ 一致有界且等度连续即可. 记 $M := \sup\limits_{x,y\in\Omega} |K(x, y)|$,

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{x\in\Omega} |Tu(x)| \le \max_{x\in\Omega} \int_\Omega |K(x, y)u(y)|\, \mathrm{d}y \\ &\le M \cdot \|u\| \cdot |\Omega| \le M \cdot |\Omega|\end{aligned}$$

注意到 $K(x, y)$ 在 $\Omega \times \Omega$ 上一致连续, 那么,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, 当 $|x - x'| < \delta$ 时有 $|K(x, y) - K(x', y)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}|Tu(x) - Tu(x')| &\le \int_\Omega |K(x, y) - K(x', y)|\, |u(y)|\, \mathrm{d}y \\ &\le \varepsilon \int_\Omega |u(y)|\, \mathrm{d}y \\ &\le \varepsilon \|u\|\, |\Omega| \le \varepsilon\, |\Omega|\end{aligned}$$

□

性质 6.11. $\mathfrak{C}(X, Y) \subset \mathscr{L}(X, Y)$ 闭

证明. (1) $\mathfrak{C}(X, Y) \subset \mathscr{L}(X, Y)$.
设 $A \in \mathfrak{C}(X, Y), \overline{AB_1(X)} \subset Y$ 紧, 从而有界.
记 $M := \sup\limits_{x\in B_1(X)} \|Ax\| = \sup\limits_{y\in A(B_1(X))} \|y\| < +\infty$. 因此, 对 $\forall x \in X\backslash\{0\}$, $\dfrac{x}{2\|x\|} \in B_1(X)$. 于是, $\left\|A\dfrac{x}{2\|x\|}\right\| \le M$ 或 $\|Ax\| \le 2M \cdot \|x\|$, 即 $A \in \mathscr{L}(X, Y)$.

(2) $\mathfrak{C}(X,Y)\subset\mathscr{L}(X,Y)$ 闭.

设 $A_n\in\mathfrak{C}(X,Y)$ 且 $A_n\xrightarrow{\|\cdot\|}A\in\mathscr{L}(X,Y)$, 下证: $A\in\mathfrak{C}(X,Y)$, 即 $\overline{A(B_1(X))}\subset Y$ 紧, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\|A_n-A\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 注意到 $\overline{A_n(B_1(X))}$ 存在有限 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网 $N_{\frac{\varepsilon}{3}}:=\{y_1,\cdots,y_m\}$. 于是, $\forall y\in\overline{A(B_1(X))},\exists x\in B_1(X)$ 使得 $\|Ax-y\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 对 $A_nx,\exists y_{i_0}\in N_{\frac{\varepsilon}{3}}$ 使得 $\|y_{i_0}-A_nx\|\le\frac{\varepsilon}{3}$. 从而

$$\begin{aligned}\|y-y_{i_0}\|&\le\|y-Ax\|+\|Ax-A_nx\|+\|A_nx-y_{i_0}\|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\|A-A_n\|\cdot\|x\|+\frac{\varepsilon}{3}\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\{y_1,\cdots,y_m\}$ 为 $\overline{A(B_1(X))}$ 的 ε-网. 由 ε 的任意性, $\overline{A(B_1(X))}\subset Y$ 紧. $\square$

定理 6.12. $T\in\mathfrak{C}(X,Y)\Longleftrightarrow T^*\in\mathfrak{C}(Y^*,X^*)$

证明. ($\Longrightarrow$) 设 $\{f_n\}\subset B_1(Y^*)$, 则 $\varphi_n:=f_n|_{\overline{TB_1(X)}}\in C(\overline{T(B_1(X))})$

(1) $\{\varphi_n\}$ 在 $C\left(\overline{TB_1(X)}\right)$ 中有收敛子列.

注意到 $T\in\mathfrak{C}(X,Y)$, $\overline{T(B_1(X))}\subset Y$ 紧. 根据 Arzela-Ascoli 定理, 只需证 $\{\varphi_n\}$ 一致有界, 等度连续. 对 $\forall y\in\overline{T(B_1(X))},|\varphi_n(y)|=|f_n(y)|\le\|f_n\|\cdot\|y\|\le\|y\|\le\|T\|$. [$\|y\|\le\|T\|$ 是因为 $\exists Tx_n\to y,\|y\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n\|\le\sup\limits_n\|T\|\|x_n\|\le\|T\|$.] 因此, $\{\varphi_n\}$ 一致有界. 对 $y,y'\in\overline{T(B_1(X))}$, $\left|\varphi_n(y)-\varphi_n(y')\right|\le\|f_n\|\|y-y'\|\le\|y-y'\|$, 这说明 $\{\varphi_n\}$ 等度连续.

(2) $\{T^*f_n\}$ 有收敛的子列.

由 (1) , 不妨设子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 按最大模范数收敛. 于是

$$\begin{aligned}\|T^*f_{n_{k+p}}-T^*f_{n_k}\|&=\sup_{x\in B_1(X)}\left\|(T^*f_{n_{k+p}}-T^*f_{n_k})x\right\|\\&=\sup_{x\in B_1(X)}\|(f_{n_{k+p}}-f_{n_k})(Tx)\|\\&\le\|\varphi_{n_{k+p}}-\varphi_{n_k}\|\to0\quad(k\to\infty,\forall p\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

即 $\{T^*f_{n_k}\}\subset X^*$ 是基本列, 从而收敛.

($\Longleftarrow$) 由必要性, $T^{**}\in\mathfrak{C}(X^{**},Y^{**})$, 又 $X\subset X^{**}$ 且 $T^{**}|_X=T$. 从而 $T\in\mathfrak{C}(X,Y)$. $\square$

6.2.2 全连续算子

定义 6.13. 设 $A \in \mathscr{L}(X,Y)$, 若对任意的 $x_n \rightharpoonup x$ 有 $Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} Ax$, 称 A 是全连续算子.

性质 6.14. *(1)* 若 $A \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 则 A 是全连续的.
(2) X 自反的 Banach 空间, A 全连续, 则 $A \in \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明. (1) 设 $x_n \rightharpoonup x$, 下面反证: $Ax_n \to Ax$. 若 Ax_n 不收敛到 Ax, $\exists \varepsilon_0 > 0$, 及子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\|Ax_{n_k} - Ax\| \geq \varepsilon_0$. 根据共鸣定理知 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{x_{n_k}\}$ 有界. 由 A 的紧性知存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子列, 不妨仍记为 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $Ax_{n_k} \to y \in Y$. 另一方面, 对 $\forall f \in Y^*$, 有 $f(Ax_{n_k - Ax}) = (A^* f)(x_{n_k} - x) \to 0$, 即 $Ax_{n_k} \rightharpoonup xAx$, 由弱极限的唯一性, $Ax = y$. 从而 $Ax_{n_k} \to Ax$, 矛盾.
(2) 设 $\{x_n\} \subset X$ 有界, 由 X 的自反性知 $\{x_n\}$ 有弱收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \rightharpoonup x$, 由 A 的全连续性, $Ax_{n_k} \to Ax$, 从而 $A \in \mathfrak{C}(X,Y)$. □

6.2.3 有限秩算子

定义 6.15. X, Y 是赋范空间, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. 若 $\dim R(T) < +\infty$, 称 T 是有限秩算子. 全体有限秩算子记为 $F(X,Y)$, $F(X) := F(X,X)$.

[注记: 显然有 $F(X,Y) \subset \mathfrak{C}(X,Y)$]

例: 设 $f \in X^*, y \in Y\{0\}$. 令 $T := f \otimes y : X \to Y, x \mapsto f(x) \cdot y$, 则 $T \in \mathscr{L}(X,Y), \dim R(T) = \dim \mathrm{Span}\{y\} = 1$, 称 $T = f \otimes y$ 为秩 1 的算子.

性质 6.16. $T \in F(X,Y) \iff \exists y_1, \cdots, y_m \in Y, f_1, \cdots, f_m \in X^*$ 使得 $T = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \otimes y_k$

证明. $(\Longleftarrow)$ 显然.

$(\Longrightarrow)$ 取 $R(T)$ 的一组基 $\{y_1,\cdots,y_m\}$, 则对 $\forall x\in X$, 存在唯一的 $f_1(x),\cdots,f_m(x)\in\mathbb{K}$ 使得 $Tx=\sum\limits_{k=1}^{m}f_k(x)y_k$, 由 T 的线性性, $f_k:X\to\mathbb{K}$, $x\mapsto f_k(x)$ 是线性的. 注意到 $\|Tx\|,\sum\limits_{k=1}^{m}|f_k(x)|$ 都是 $R(T)$ 上的范数且 $\dim R(T)<+\infty$. 于是, $\exists M>0$ 使得

$$\left|f^k(x)\right|\leq\sum_{k=1}^{m}|f_k(x)|\leq M\cdot\|Tx\|\leq M\cdot\|T\|\|x\|$$

即 $f_k\in X^*$, 因此, 由 x 的任意性及 $Tx=\left(\sum\limits_{k=1}^{m}f_k\otimes y_k\right)(x)$ 知, $T=\sum\limits_{k=1}^{m}f_k\otimes y_k$. □

6.2.4 紧算子的逼近

问题: 已经知道有限秩算子是紧算子, 能否用有限秩算子去逼近紧算子? 即 $\overline{F(X)}=\mathfrak{C}(X)$?

定理 6.17. $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, 则 $\overline{F(X)}=\mathfrak{C}(X)$.

证明. $\overline{F(X)}=\mathfrak{C}(X)\Longleftrightarrow\forall T\in\mathfrak{C}(X),\forall\varepsilon>0,\exists T_\varepsilon\in F(X)$ 使得 $\|T_\varepsilon-T\|<\varepsilon$. 注意到 $\overline{TB_1(X)}\subset X$ 紧, $\exists$ 有限 $\frac{\varepsilon}{2}-$ 网 $N_{\frac{\varepsilon}{2}}:=\{y_1,\cdots,y_m\}$ 使得

$$\overline{TB_1(X)}\subset\bigcup_{k=1}^{m}B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_k)$$

记 $X_\varepsilon:=\mathrm{Span}\{y_1,\cdots,y_m\}$, 作正交投影 $P_\varepsilon:X\to X_\varepsilon$, 则 $P_\varepsilon,P_\varepsilon T\in F(X)$, 对 $\forall x\in B_1(X)$, $\exists y_i$ 使得 $\|Tx-y_i\|_X\leq\frac{\varepsilon}{2}$. 从而, 有

$$\|P_\varepsilon Tx-y_i\|=\|P_\varepsilon Tx-P_\varepsilon y_i\|\leq\|P_\varepsilon\|\cdot\|Tx-y_i\|=\|Tx-y_i\|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

于是, $\|Tx-P_\varepsilon Tx\|\leq\|Tx-y_i\|+\|y_i-P_\varepsilon Tx\|\leq\varepsilon$. 即 $\|T-P_\varepsilon T\|\leq\varepsilon$, 取 $T_\varepsilon:=P_\varepsilon T$ 即可. □

[注记: 这里用到算子范数的等价定义 $\|T\| = \sup_{x\in B_1(X)} \|Tx\|$] .

定义 6.18. X 是可分的 Banach 空间, $\{e_n \mid n=1,2,\cdots\} \subset X$(线性无关). 若 $\forall x \in X$, 存在唯一数列 $\{c_n(x)\} \subset \mathbb{K}$ 使得

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$$

称 $\{e_n\}$ 为 X 的 Schauder 基.

性质 6.19. $c_n : X \to \mathbb{K}, x \mapsto c_n(x)$ 是 X 上的连续线性泛函.

证明. (1) 线性性: 由 $\{c_n(x)\}$ 的唯一性保证.
(2) 有界性: 记 $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k(x)e_k$. 由 $c_k(x)$ 的线性性知, $S_n(x)$ 是线性的. 令 $\|x\|' := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|, \forall x \in X$. 易知 $\|\cdot\|'$ 是 X 上的范数且 $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|S_n(x)\| \le \sup_n \|S_n(x)\| = \|x\|', \forall x \in X$. 下证 $(X, \|\cdot\|')$ 是完备的. 设 $\{x_k\} \subset (X, \|\cdot\|')$ 是基本列, 则由 $\|x_k - x_l\| \le \|x_k - x_l\|'$ 知 $\{x_k\} \subset (X, \|\cdot\|)$ 是基本列. 记 $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x \in X$. 由 $\{x_k\} \subset (X, \|\cdot\|')$ 是基本列知: $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0$ 使得 $k, l > K$, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|S_n(x_k) - S_n(x_l)\| \le \sup_n \|S_n(x_k - x_l)\| = \|x_k - x_l\|' < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.19}$$

于是, 对任意固定 $n \in \mathbb{N}$, $\{S_n(x_k) \mid k = 1,2,\cdots\} \subset X_n := \mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是基本列, 注意到 $X_n \subset X$ 闭, 可设 $S_n(x_k) \xrightarrow{\|\cdot\|} y_n \in X_n, k \to \infty$. 由 $X_n \subset X_{n+1}$ 且有限维, 可记 $y_n = \sum_{p=1}^{n} a_p e_p \in X_n, a_p \in \mathbb{K}$. 对上述的 $\varepsilon > 0$, 在 (6.19)式中令 $l \to \infty$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|S_n(x_k) - y_n\| \le \frac{\varepsilon}{3}, k > K$$

由 $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, 取 $l_0 > K$ 使得 $\|x_{l_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$, 则由 $\lim_{n\to\infty} S_n(x_{l_0}) = x_{l_0}$ 知 $\exists N \in \mathbb{N}$,

当 $n \geq N$ 时有 $\|S_n(x_{l_0}) - x_{l_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. 于是, 当 $n \geq N$ 时有

$$\begin{aligned}\|y_n - x\| &\leq \|y_n - S_n(x_{l_0})\| + \|S_n(x_{l_0}) - x_{l_0}\| + \|x_{l_0} - x\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

因此 $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, 又 $y_n = \sum_{p=1}^{n} a_p e_p$, 由 Schauder 基定义 $y_n = S_n(x)$, 因此对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|S_n(x_k) - S_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, k > K$$

从而

$$\|x_k - x\|' = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x_k) - S_n(x_l)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, k > K$$

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$, 使得 $k > K$ 时, $\|x_k - x\|' < \frac{\varepsilon}{3}$, 因此 $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|'} x$, $(X, \|\cdot\|')$ 完备. 根据等价范数定理,$\exists M > 0$ 使得 $\|x\|' \leq M \cdot \|x\|, \forall x \in X$. 于是,

$$\|c_n(x)e_n\| \leq \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leq \|S_n(x)\| + \|S_{n-1}(x)\| \leq 2\|x\|' \leq 2M \cdot \|x\|$$

即有

$$|c_n(x)| \leq 2M \cdot \|e_n\|^{-1}\|x\|, \forall x \in X$$

因此 $c_n \in X^*$. □

定理 6.20. X 是可分的 Banach 空间, 有 Schauder 基, 则 $\overline{F(X)} = \mathfrak{C}(X)$

证明. (1) $S_n : X \to X, x \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k(x)e_k$ 一致有界. 由性质 (6.19)知 $S_n \in \mathscr{L}(X)$, 又对 $\forall x \in X, S_n(x)$ 收敛到 x. 从而 $\sup_n \|S_n(x)\| \leq M_x < +\infty$. 根据共鸣定理, $\exists M > 0$, $\|S_n\| \leq M$.
(2) $\overline{F(x)} = \mathfrak{C}(X)$. 即证 $\forall T \in \mathfrak{C}(X)$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon \in F(X)$ 使得 $\|T_\varepsilon - T\| < \varepsilon$. 由 $\overline{TB_1(X)} \subset X$ 紧, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\frac{\varepsilon}{3(M+1)}$ 网 $\{y_1, \cdots, y_m\}$, 即 $\forall x \in B_1(X)$, $\exists y_i$ 使得

$$\|Tx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{3(M+1)}$$

又 $\|S_n\| \le M$, 上式隐含着

$$\|S_n(Tx-y_i)\| \le \|S_n\| \cdot \|Tx-y_i\| \le \frac{M\cdot\varepsilon}{3(M+1)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

根据 Schauder 基定义, $\exists N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\ge N$ 时有

$$\|y_l - S_n(y_l)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall l\in\{1,\cdots,m\}$$

于是,

$$\begin{aligned}\|S_n(Tx)-Tx\| &\le \|S_n(Tx)-S_n(y_i)\| + \|S_n(y_i)-y_i\| + \|y_i - Tx\| \\ &< \varepsilon, \forall x\in B_1(X)\end{aligned}$$

因此 $\|S_nT-T\|<\varepsilon$, 取 $T_\varepsilon := S_nT$ 即可. □

6.3 Riesz-Fredholm 理论

本节主要介绍由 Banach 空间上紧算子 A 构造的新算子 $T:=I-A$ 的性质, 它与有限维线性空间上线性变换有相同的性质.

6.3.1 记号约定与定理描述

X 是 Banach 空间, $T\in\mathscr{L}(X), M\subset X, N\subset X^*$, 约定

(1) $R(T):=\{Tx \mid x\in X\}, \ker(T):=\{x\in X \mid Tx=0\}$

(2) $M^\perp := \{f\in X^* \mid f(x)=0, \forall x\in M\}$

(3) $N^\perp := \{x\in X \mid f(x)=0, \forall f\in M\}$

性质 6.21. $T\in\mathscr{L}(X)$, 有:

(1) $R(T)^\perp = \ker(T^*), R(T^*)^\perp = \ker(T)$

(2) $\overline{R(T)} = \ker(T^*)^\perp, \overline{R(T^*)} \subset \ker(T)^\perp$

证明. (1)

$$\begin{aligned}R(T)^\perp &= \{f\in X^* \mid f(Tx)=0, \forall x\in X\} \\ &= \{f\in X^* \mid (T^*f)(x)=0, \forall x\in X\} \\ &= \{f\in X^* \mid T^*f=0\} = \ker(T^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(T^*)^\perp &= \{x \in X \mid (T^* f)(x) = 0, \forall f \in X^*\} \\ &= \{x \in X \mid f(Tx) = 0, \forall f \in X^*\} \\ &= \{x \in X \mid Tx = 0\} = \ker(T) \end{aligned}$$

(2) 仅证第一个等式. 由 (1) 知, 只需证 $\overline{R(T)} = \left(R(T)^\perp\right)^\perp$

(i) $\overline{R(T)} \subset \left(R(T)^\perp\right)^\perp$

$\forall x \in \overline{R(T)}$, $\perp\{x_n\} \subset X$ 使得 $Tx_n \to x$. 对 $\forall f \in R(T)^\perp$,$0 = f(Tx_n) \to f(x)$, 即 $f(x) = 0$, $x \in (R(T)^\perp)^\perp$.

(ii) $\left(R(T)^\perp\right)^\perp \subset \overline{R(T)}$

设 $x \in (R(T)^\perp)^\perp$, 对任意 $f \in R(T)^\perp$, 由定义 $f(x) = 0$. 由 Hahn-Banach 定理的推论知 $x \in \overline{R(T)}$. □

定理 6.22. X 是 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T := I - A$, 则有

(1) $R(T) = \ker(T^*)^\perp$, $R(T^*) = \ker(T)^\perp$

(2) $\ker(T) = \{0\} \iff R(T) = X$

(3) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$

(4) $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*) < +\infty$

(5) $\mathrm{codim} R(T) = \dim\ker(T)$

[注记:(3) 对任何 $T \in \mathscr{L}(X)$ 均成立. $\mathrm{codim} R(T) := \dim X/R(T)$]

6.3.2 定理的证明

性质 6.23. X 是 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$,$T := I - A$, 有

$$R(T) = \ker(T^*)^\perp$$

证明. 根据性质 $\overline{R(T)} = \ker(T^*)^\perp$, 只要证 $R(T) = \overline{R(T)}$ 即可. 注意到 $T \in \mathscr{L}(X)$, $\ker(T) \subset X$ 闭子空间, 作商空间 $\widetilde{X} := X/\ker(T)$ 及映射

$$\widetilde{T} : \widetilde{X} \longrightarrow X, [x] \longmapsto \widetilde{T}[x] := Tx$$

则有 $\|\widetilde{T}[x]\| = \|Ty\| \le \|T\| \cdot \|y\|, \forall y \in [x]$. 关于 y 在 $[x]$ 中取下确界, 由商空间范数定义得

$$\|\widetilde{T}[x]\| \le \|T\| \cdot \inf_{y\in[x]} \|y\| = \|T\| \cdot \|[x]\|$$

即 $\|\widetilde{T}\| \le \|T\|$, 所以 $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\widetilde{X}, X)$. 又 $\ker(\widetilde{T}) = \{[0]\}$, $\widetilde{T}^{-1}$ 存在.

(1) $\widetilde{T}^{-1} : R(T) \to \widetilde{X}$ 连续.

反证, 假设 $\widetilde{T}^{-1}$ 不连续, 即 $\exists \{Tx_n\} \subset R(T)$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\|Tx_n\| \to 0$ 但 $\|\widetilde{T}^{-1}(Tx_n)\| = \|[x_n]\| \ge \varepsilon_0$. 于是, 令 $x_n' = \dfrac{x_n}{\|[x_n]\|}$, 则 $\|[x_n']\| = 1$ 且

$$\widetilde{T}[x_n'] = Tx_n' = \frac{Tx_n}{\|[x_n]\|} \le \frac{Tx_n}{\varepsilon_0} \to 0$$

由 $\|[x_n']\|$ 的定义, $\exists y_n \in [x_n']$ 使得 $\|y_n\| \le 2$, 则

$$(I - A)y_n = Ty_n = Tx_n' \to 0$$

注意到 $\{y_n\}$ 有界且 A 紧, 则 $\{Ay_n\}$ 有收敛子列 (仍记为 Ay_n), 收敛于 y, 即 $Ay_n \to y$. 因此, 由 $(I - A)y_n \to 0$ 知 $y_n \to y$. 于是, $(I - A)y = 0$ 或 $y \in \ker(T)$. 有 $y_n - y \in [x_n']$, 从而 $\|[x_n']\| \le \|y_n - y\| \to 0$, 与 $\|[x_n']\| = 1$ 矛盾.

(2) $R(T) = \overline{R(T)}$

由 $\widetilde{T}^{-1}$ 的连续性及 $R(T) = R(\widetilde{T})$, 把 $\widetilde{T}^{-1}$ 的定义域延拓到 $\overline{R(T)}$, 即 $\widetilde{T}^{-1} : \overline{R(T)} \to \widetilde{X}$. 下证: $\overline{R(T)} \subset R(T)$. $\forall y \in \overline{R(T)}$, $\exists [x_n] \in \widetilde{X}$ 使得 $\widetilde{T}[x_n] \to y$. 由 $\widetilde{T}^{-1}$ 的连续性, $[x_n] = \widetilde{T}^{-1}(\widetilde{T}[x_n]) \to \widetilde{T}^{-1}y \in \widetilde{X}$. 于是, $y = \widetilde{T}(\widetilde{T}^{-1}y) \in R(\widetilde{T}) = R(T)$. □

性质 6.24. *X 是 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T = I - A$. 若 $\ker(T) = \{0\}$, 则 $R(T) = X$.*

证明. 记 $X_0 = X, X_k := T^kX$. 注意到

$$T^k = (I - A)^k = \sum_{l=0}^{k} \mathrm{C}_k^l I^{k-l}(-1)^l A^l := I - \widetilde{A}$$

其中 $\widetilde{A} \in \mathfrak{C}(X)$, 由性质(6.23)知 $X_k \subset X$ 为闭子空间. 下面使用反证法, 假设 $X \ne R(T)$, 由 T 是单射知 $X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots \supsetneq X_k \supsetneq \cdots$. 事实上, 若

$TX = T^2X, \forall y \in X, \exists x \in X$ 使得 $T^2x = Ty \iff T(y - Tx) = 0$. 即 $y - Tx \in \ker(T) = \{0\}$ 或 $y = Tx$. 于是, $X = R(T)$, 矛盾. 类似可证: $T^kX \supsetneq T^{k+1}X$. 注意到 X_k 闭, 根据 Riesz 引理, $\forall k, \exists y_k \in X_k \backslash X_{k+1}$ 使得 $\|y_k\| = 1$ 且 $\rho(y_k, X_{k+1}) \geq \dfrac{1}{2}$. 于是, 对 $\forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$\|Ay_n - Ay_{n+p}\| = \|y_n - Ty_n - y_{n+p} + Ty_{n+p}\| \geq \frac{1}{2}$$

从而 $\{Ay_n\}$ 中无收敛子列, 与 A 的紧性矛盾. □

性质 6.25. *X 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(X)$, 则 $T^{-1} \in \mathscr{L}(X) \iff (T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X^*)$.*

证明. ($\Longrightarrow$) 只需证 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. 对 $\forall x \in X, f \in X^*$,

$$\left((T^{-1})^*T^*f\right)(x) = (T^*f)(T^{-1}x) = f(TT^{-1}x) = f(x)$$

$$(T^*(T^{-1})^*f)(x) = \left((T^{-1})^*f\right)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x)$$

所以, $(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$. 或 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \in \mathscr{L}(X^*)$.
($\Longleftarrow$) 由 $(T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X^*)$ 及必要性知 $(T^{**})^{-1} \in \mathscr{L}(X**)$. 注意到, $X \subset X^{**}$, $T = T^{**}|_X$ 知 T 单射. 若能证明 $R(T) = X$, 根据 Banach 逆算子定理, 则 $T^{-1} \in \mathscr{L}(X)$.
(i) $R(T) \subset X$ 闭: 设 $x_n \in X$ 使得 $Tx_n \to y \in X$, 则 $x_n = (T^{**})^{-1}T^{**}x_n = (T^{**})^{-1}Tx_n \to (T^{**})^{-1}y$. 由 X 的完备性知 $(T^{**})^{-1}y \in X$. 于是,

$$y = T^{**}(T^{**})^{-1} = T(T^{**})^{-1}y \in R(T)$$

(ii) $R(T) = X$.(反证), 若 $R(T) \neq X$, 由 (i) 及 Hahn-Banach 定理, $\exists f \in X^* \backslash \{0\}$ 使得 $f|_{R(T)} = 0$, 即 $f \in R(T)^{\perp} = \ker(T^*) \neq \{0\}$ 与 $(T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X^*)$ 矛盾. □

推论 6.26. *X 是 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(X)$, 则 $\sigma(A) = \sigma(A^*)$*

证明. $\sigma(A) = \sigma(A^*) \iff \rho(A) = \rho(A^*) \iff (\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ 当且仅当 $(\lambda I - A^*)^{-1} \in \mathscr{L}(X^*)$, 在性质(6.25)中取 $T = \lambda I - A$ 即可. □

性质 6.27. X 是 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T = I - A$, 则 $\mathrm{codim}R(T) \leq \dim\ker(T) < +\infty$.

证明. (1) $\dim\ker(T) < +\infty$.
注意到 $A|_{\ker(T)} = I|_{\ker(T)}$, 若 $\dim\ker(T) = +\infty$, 那么 $\ker(T)$ 中的单位球不是列紧的. 但 $A(B_1(\ker(T))) = B_1(\ker(T))$, 与 A 的紧性矛盾. 记 $\dim\ker(T) = n$.
(2) $\exists P \in \mathscr{L}(X)$ 使得 $PX = \ker(T)$, $P|_{\ker T} = \mathrm{id}$. 取 $\ker(T)$ 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 记 $M_i = \mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_n\}$. 由 Hahn-Banach 定理, $\exists f_i \in X^*$ 使得 $f_i|_{M_i} = 0, f_i(e_i) = 1$. 作 $P : X \to \ker(T)$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k$, 则 P 满足要求.
(3) $\mathrm{codim}R(T) \leq \ker(T)$.
(反证), 假设 $\dim X/R(T) > \dim\ker(T)$, 取 $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} \in X$ 使得 $[x_1], \cdots, [x_{n+1}]$ 在 $X/R(T)$ 中线性无关. 记 $N := \mathrm{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则 $N \cap R(T) = \{0\}$, $x_{n+1} \notin R(T)$. 任取线性同构 $V : \ker T \to N$. 令 $T' := T + VP = I - (A - VP), A - VP \in \mathfrak{C}(X)$. 下证: $\ker(T') = \{0\}$. 若 $T'x = 0 \Longleftrightarrow Tx = -VPx$. 由 $N \cap R(T) = \{0\}$ 知 $-VPx = 0 = Tx$, 即 $x \in \ker(T)$. 所以 $Px = x$, 由于 $V : \ker T \to N$ 是线性同构, 知 $x = 0$. 再由 $A - VP \in \mathfrak{C}(X)$ 及 $\ker(T') = \{0\}$, 由性质 (6.24)知 $R(T') = X$, 但由 $R(T') = R(T) \oplus N$ 知 $x_{n+1} \in R(T') = X$, 矛盾. □

[注记: 对 T^* 也有 $\mathrm{codim}R(T^*) \leq \dim\ker(T^*) < +\infty$]

引理 6.28. X 是赋范空间, $M \subset X$ 闭子空间, 则 $(X/M)^* \backsimeq M^\perp$ 等距同构.

证明. (1) $\forall f \in M^\perp := \{f \in X^* \mid f(M) = 0\}$. 作 $\widetilde{f} : X/M \to \mathbb{K}$, $[x] \mapsto \widetilde{f}([x]) := f(x)$. 易知, $\widetilde{f}$ 良定且线性, 又

$$\left|\widetilde{f}([x])\right| = |f(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\|, \forall y \in [x]$$

关于 y 在 $[x]$ 中取下确界得:

$$\left|\widetilde{f}([x])\right| \leq \|f\| \cdot \|[x]\|$$

即 $\|\widetilde{f}\| \leq \|f\|$.

(2) $\forall \widetilde{f} \in (X/M)^*$, 作 $f: X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x) := \widetilde{f}([x])$, f 线性且

$$|f(x)| = \left|\widetilde{f}([x])\right| \leq \|\widetilde{f}\| \cdot \|[x]\| \leq \|\widetilde{f}\| \cdot \|x\|$$

即 $\|f\| \leq \|\widetilde{f}\|$. □

性质 6.29. $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*) = \operatorname{codim}R(T) = \operatorname{codim}R(T^*)$

证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}R(T) &= \dim X/R(T) = \dim(X/R(T))^* = \dim R(T)^{\perp} \\ &= \dim\left((\ker T^*)^{\perp}\right)^{\perp} \geq \dim\ker(T^*)\end{aligned}$$

在上式中, 用 T^* 代替 T 有

$$\operatorname{codim}R(T^*) \geq \dim\ker(T^{**}) \geq \dim\ker(T)$$

于是, $\dim\ker(T^*) \leq \operatorname{codim}R(T) \leq \dim\ker(T) \leq \operatorname{codim}R(T^*) \leq \dim\ker(T^*)$ □

性质 6.30. X 是 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T = I - A$, 有 $R(T^*) = \ker(T)^{\perp}$

证明. 根据性质 (6.29)有 $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^{**}) < +\infty$, 又由 $\ker(T) \subset \ker(T^{**})$ 知 $\ker(T) = \ker(T^{**})$. 再由性质 (6.23)知 $R(T^*) = \ker(T^{**})^{\perp} = \ker(T)^{\perp}$. □

6.4 Riesz-Schauder 理论

本节介绍紧算子谱的分布, 紧算子的不变子空间的存在性及紧算子的结构.

6.4.1 紧算子的谱

定理 6.31. X 是 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则
(1) 若 $\dim X = +\infty$, 则 $0 \in \sigma(A)$
(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$
(3) $\sigma(A)$ 的聚点只能是 0.

证明. (1) (反证) 若 $0 \notin \sigma(A)$, 则 0 为 A 的正则值, 即 $A^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. 于是, 由 $I = AA^{-1}$, 把等式限制到 X 的单位球面 $S_1(X)$ 上, 由 $\dim X = +\infty$, $S_1(X)$ 不是列紧的. 但 $S_1(X) = AA^{-1}(S_1(X))$, 由 A 的紧性知 $S_1(X)$ 列紧, 矛盾.
(2) 由 Riesz-Fredholm 定理, 若 $\ker(\lambda I - A) = \{0\}(\lambda \neq 0)$, 则 $R(\lambda I - A) = X$, 根据 Banach 逆算子定理, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, 即 λ 是正则值.(即 A 无除 0 之外的剩余谱和连续谱)
(3)(反证) 假设 $\lambda_n \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ 且 $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. 取 $x_n \in \ker(\lambda_n I - A)\backslash\{0\}$, 则 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 线性无关. 令 $X_n := \text{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则 $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \subsetneq \cdots$. 根据 Riesz 引理, $\exists y_{n+1} \in X_{n+1}, \|y_{n+1}\| = 1, \rho(y_{n+1}, X_n) \geq \frac{1}{2}$. 注意到 $\lambda \neq 0$, 所以 $\inf\limits_k\{|\lambda_k|\} \geq \delta > 0$, 即 $\left\{\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ 是有界列. 另一方面, 对 $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p} - \frac{1}{\lambda_n}Ay_n\right\| = \left\|y_{n+1} - \left(y_{n+1} - \frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p} + \frac{1}{\lambda_n}Ay_n\right)\right\| \geq \frac{1}{2}$$

与 A 的紧性矛盾. □

[注记: 对于无穷维空间上的紧算子 A, A 的谱只有下列三种可能情形:
(1) $\sigma(A) = \{0\}$
(2) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$
(3) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots\}$, 其中 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > \cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$]

6.4.2 紧算子不变子空间的存在性

定义 6.32. X 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(X)$, $M \subset X$ 是子空间. 若 $T(M) \subset M$, 则称 M 是 T 的 不变子空间.

性质 6.33. X 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(X)$, 则
(1) $\{0\}, X$ 都是 T 的不变子空间.
(2) M 是 T 的不变子空间, $\overline{M}$ 也是 T 的不变子空间.
(3) $\forall \lambda \in \sigma_p(A), \ker(\lambda I - A)$ 是 A 的不变子空间
(4) 对 $\forall y \in X, L_y := \{p(A)y \mid p(t)\text{是}\mathbb{K}\text{上多项式}\}$ 为 A 的不变子空间. [若 $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, 则 $p(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k$.]

定理 6.34. X 是 Banach 空间, $\dim X \geq 2$,$A \in \mathfrak{C}(X)$, 则 A 有非平凡的闭不变子空间.

证明. (反证) 我们不妨设 $\dim X = +\infty$, $A \neq 0, \|A\| = 1, \sigma_p(A) = \varnothing$(若有点谱, 则一定是非平凡不变子空间), $\sigma(A) = \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A) = \{0\}$, 即 0 是 A 的剩余谱或者连续谱, $\ker(A) = \{0\}$. 注意到 $\|A\| = 1$, $\exists x_0 \in X$ 使得 $\|x_0\| > 1, \|Ax_0\| > 1$. 记 $B_1(x_0) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| < 1\}$, 则 $C := \overline{AB_1(x_0)} \subset X$ 紧. 由 $\ker(A) = \{0\}$, 知 $0 \notin C$. 假设 A 无非平凡的不变子空间, 则 $\forall y \in C, \overline{L_y} = X$. 于是, 存在多项式 $p(t)$ 使得 $T_y := p(A)$ 使得 $\|T_y y - x_0\| < 1$. 由 T_y 的连续性, $\exists \delta_y > 0$ 使得对 $\forall z \in B_{\delta_y}(y)$ 有 $\|T_y z - x_0\| < 1$. 由 C 的紧性, 存在有限个 $y_1, \cdots, y_m \in C$ 使得 $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{\delta_{y_i}}(y_i)$. 对 $\forall z \in C, \exists i_1$ 使得 $\|T_{i_1} z - x_0\| < 1, T_{i_1} := T_{y_{i_1}}$. 即 $T_{i_1} z \in B_1(x_0)$. 从而 $AT_{i_1} z \in \overline{AB_1(x_0)} = C$. 对 $AT_{i_1} z = T_{i_1} Az$, $\exists i_2$ 使得 $\|T_{i_2} T_{i_1} Az - x_0\| < 1, T_{i_2} := T_{y_{i_2}}$. 重复上述过程, $\exists i_1, \cdots, i_k, \cdots$ 使得

$$\left\| \prod_{l=1}^{k+1} T_{i_l} A^k z - x_0 \right\| < 1$$

因此

$$\|x_0\|-1\leq\left\|\prod_{l=1}^{k+1}T_{i_l}A^kz\right\|\leq\mu^{k+1}\|A^kz\|\leq\mu^{k+1}\|A^k\|\|z\|$$

其中 $\mu=\max\limits_{1\leq i\leq m}\|T_{y_i}\|>0$, 从而有

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\|x_0\|-1}{\mu\|z\|}\right)^{\frac{1}{k}}\leq\|A^k\|$$

令 $k\to\infty$, $\dfrac{1}{\mu}\leq\lim\limits_{k\to\infty}\|A^k\|^{\frac{1}{k}}=0$(Gelfand 谱半径估计), 矛盾. □

6.4.3 紧算子的结构

定义 6.35. *X 是 Banach 空间, $T\in\mathscr{L}(X)$, 称 $\{0\}\subseteq\ker(T)\subseteq\ker(T^2)\subseteq\cdots\subset\ker(T^k)\subseteq\cdots$ 为 T 的 零链; 称 $X\supseteq R(T)\supseteq\cdots\supseteq R(T^k)\supseteq\cdots$ 为 T 的 像链.*

[注记: 可以验证: 若 $\ker(T^k)=\ker(T^{k+1})(R(T^k)=R(T^{k+1}))$, 则对 $\forall l\geq k$ 有 $\ker(T^k)=\ker(T^l)(R(T^k)=R(T^l))$.]

定义 6.36. *最小 $p(q)\in\mathbb{N}$ 满足 $\ker T^p=\ker T^{p+1}(R(T^q)=R(T^{q+1}))$, 称为 T 的 零链长 (像链长).*

性质 6.37. *X 是 Banach 空间, $A\in\mathfrak{C}(X)$, $T:=I-A$, 则 $p=q<+\infty$.*

证明. (1) $q<+\infty$, 反证, 若 $q=+\infty$, 由 q 的定义, $R(T)\supsetneq R(T^2)\supsetneq\cdots\supsetneq R(T^k)\supsetneq\cdots$. 由于 $T^k=(I-A)^k=I-\widetilde{A}$, $\widetilde{A}:=-\sum\limits_{l=1}^{k}\mathrm{C}_k^l(-A)^l\in\mathfrak{C}(X)$. 根据 Riesz-Fredholm 理论, $R(T^k)\subset X$ 闭. 利用 Riesz 引理, 得到与 A 紧矛盾.
(2) $p\leq q$. 注意到 $\dim\ker(T^q)=\operatorname{codim}R(T^q)=\operatorname{codim}R(T^{q+1})=\dim\ker T^{q+1}<+\infty$, 以及 $\ker T^q\subset\ker T^{q+1}$ 知 $\ker(T^q)=\ker(T^{q+1})$. 由 p 的定义, $p\leq q$.

(3) $q \leq p$. 由 $\ker T^p = \ker T^{p+1}$ 知:

$$\text{codim}R(T^{p+1}) = \dim\ker(T^{p+1}) = \dim\ker(T^p) = \text{codim}R(T^p)$$

知 $\dim X/R(T^p) = \dim X/R(T^{p+1})$. 由 $R(T^p) \supsetneq R(T^{p+1})$ 得到 $R(T^p) = R(T^{p+1})$. 由 q 的定义, $q \leq p$. □

定理 6.38. X 是 Banach 空间, $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T := I - A$, 则 $\exists p \in \mathbb{N}$ 使得 $X = \ker(T^p) \oplus R(T^p)$ 且 $T' := T|_{R(T^p)} : R(T^p) \to R(T^{p+1})$ 有有界逆.

证明. 设 p 为 T 的零链长.

(1) $\ker(T^p) \cap R(T^p) = \{0\}$.

设 $y \in \ker T^p \cap R(T^p)$, 则 $\exists x \in X$ 使得 $T^p x = y$ 及 $T^p y = 0$. 于是, $T^p x = T^p y = 0$. 由 $\ker T^p = \ker T^{2p}$ 知 $x \in \ker T^p$. 从而, $y = T^p x = 0$.

(2) $X = \ker T^p \oplus R(T^p)$.

$\forall x \in X, T^p x \in R(T^p) = R(T^{2p})$. 于是, $\exists y \in X$ 使得 $T^p x = T^{2p} y$. 令 $z = x - T^p y$, 则 $T^p z = T^p x - T^{2p} y = 0$, 即 $z \in \ker T^p$. 所以 $x = z + T^p y \in \ker T^p \oplus R(T^p)$.

(3) $T' = T|_{R(T^p)}$ 有有界逆.

注意到 $R(T^p) = R(T^{p+1})$ 知 $T' : R(T^p) \to R(T^{p+1})$ 满. 根据 Banach 逆算子定理, 只要证 T' 单. 设 $x \in \ker T'$, 则 $T'x = Tx = 0$. 由于 $x \in R(T^p)$, $\exists y \in X$ 使得 $x = T^p y$. 于是, $Tx = T^{p+1} y = 0$, 即 $y \in \ker T^{p+1} = \ker T^p$. 所以 $x = T^p y = 0$. □

6.5 Hilbert-Schmidt 定理

本节主要介绍 Hilbert 空间上对称算子的谱理论.X 约定为 Hilbert 空间.

6.5.1 对称算子

定义 6.39. $(X, (\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间, $A \in \mathscr{L}(X)$. 若对 $\forall x, y \in X$ 有 $(Ax, y) = (x, Ay)$, 称 A 为对称算子.

[注记:A 是对称算子, 则 $A = A^*$. 因为 $(Ax, y) = y(Ax) = (A^*y)(x) = (x, A^*y) = (x, Ay)$.]

例. X 是 Hilbert 空间, $M \subset X$ 闭子空间. $P_M : X \to M \subset X$ 是正交投影, 则 P_M 是对称算子.

证明. 对 $\forall x, y \in X$, 有 $x = x_M + x_M^{\perp}, y = y_M + y_M^{\perp}$, 其中 $x_M, y_M \in M, x_M^{\perp}, y_M^{\perp} \in M^{\perp}$. 于是, $(P_M x, y) = (x_M, y) = (x_M, y_M) = (x_M, P_M y) = (x, P_M y)$. □

性质 6.40. *X 是 Hilbert 空间, $A \in \mathscr{L}(X)$ 对称.*
(1) A 对称 $\iff (Ax, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$
(2) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ 且对 $\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ 有

$$\|(\lambda I - A)^{-1} x\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|\,\|x\|}$$

(3) $X_0 \subset X$ 为 A 的闭不变子空间, 则 $A|_{X_0}$ 是 X_0 上的对称算子.
(4) $\lambda, \mu \in \sigma_p(A), \lambda \neq \mu$, 则 $\ker(\lambda I - A) \perp \ker(\mu I - A)$
(5) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$

证明. (1) 令 $a(x, y) := (Ax, y)$, 则 a 是 X 上的共轭双线性型. $q(x) := a(x, x) = (Ax, x)$ 是 a 的二次型. A 对称 $\iff a(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \overline{(Ay, x)} = \overline{a(y, x)} \iff q(x) = a(x, x) = (Ax, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in X$.
(2) 根据本章第一节中的例子知 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. 对任意的 $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. 对 $\forall x \in X$ 有

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = \|(aI - A)x\|^2 + \|bx\|^2 \geq b^2 \cdot \|x\|^2$$

注意到此时 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, 对 $\forall y \in X$, 在上式中取 $x = (\lambda I - A)^{-1} y$, 则有

$$\|(\lambda I - A)^{-1} y\|^2 \leq \frac{1}{b^2} \|y\|^2$$

或 $\|(\lambda I - A)^{-1} y\| \leq \dfrac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|} \|y\|$.
(5) 记 $C := \sup\limits_{|x|=1} |(Ax, x)|$, 则 $C = \sup\limits_{|x|=1} |(Ax, x)| \leq \sup\limits_{|x|=1} \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|x\| = \|A\|$. 另一

方面, 对任意的 $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(Ax, y) &= \frac{1}{4}\left[2(Ax, y) + 2(y, Ax)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)\right] \\
&\le \frac{1}{4}\left[C \cdot \|x+y\|^2 + C \cdot \|x-y\|^2\right] \\
&\le \frac{C}{4}\left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right] \\
&= \frac{C}{4}\left[2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right] = C
\end{aligned}$$

于是, $\forall x, y \in S_1(X)$, $\exists \alpha \in S^1$, 使得

$$|(x, Ay)| = |(Ax, y)| = \alpha(Ax, y) = (A(\alpha x), y) = \operatorname{Re}(A(\lambda x), y) \le C$$

根据 Riesz 表示定理的应用, 有

$$\|A\| \le \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |(Ax, y)| \le C$$

□

6.5.2 紧对称算子的谱

定理 6.41. X 是 Hilbert 空间, A 是紧对称算子. $|\lambda| := \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$, 则 $\exists x_0 \in S_1(X)$ 使得 $|\lambda| = |(Ax_0, x_0)|$ 且 $Ax_0 = \lambda x_0$.

证明. 不妨设 $\lambda = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, 否则考虑 $-A$ 即可. 由 λ 的定义, $\exists \{x_n\} \subset S_1(X)$ 使得 $(Ax_n, x_n) \to \lambda$. 又 X 是 Hilbert 空间是自反的, 那么 $\{x_n\}$ 中有弱收敛的子列, 仍记为 $\{x_n\}$, 即 $x_n \rightharpoonup x_0$, 注意到 $\overline{B_1(X)}$ 是弱闭的, 于是 $\|x_0\| \le 1$.

(1) $\lambda = (Ax_0, x_0)$.

由 A 的紧性, 可设 $Ax_n \to y_0$. 于是,

$$\begin{aligned}
\|Ax_0 - y\|^2 &= |(Ax_0 - y_0, Ax_0 - y_0)| \\
&= |(Ax_0 - Ax_n + Ax_n - y_0, Ax_0 - y_0)| \\
&\le \left|(x_0 - x_n, A^2x_0 - Ay_0)\right| + |(Ax_n - y_0, Ax_0 - y_0)| \to 0
\end{aligned}$$

即 $Ax_0 = y_0$. 从而有 $Ax_n \to Ax_0$. 另一方面, 有

$$\begin{aligned}|(Ax_n, x_n) - (Ax_0, x_0)| &\le |(Ax_n - Ax_0, x_n) + (Ax_0, x_n) - (Ax_0, x_0)| \\ &\le |(Ax_n - Ax_0, x_n)| + |(x_0, Ax_n - Ax_0)| \to 0\end{aligned}$$

从而 $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) = (Ax_0, x_0)$.

(2) $\|x_0\| = 1$(反证)

假设 $\|x_0\| < 1$, 那么 $(Ax_0, x_0) \le \|A\| \cdot \|x_0\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x) \cdot \|x_0\|^2 < \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x) = \lambda$, 矛盾.

(3) $Ax_0 = \lambda x_0$

对 $\forall y \in X$, 当 $|t| << 1$ 时, $\varphi_y(t) = \dfrac{(A(x_0 + ty), x_0 + ty)}{\|x_0 + ty\|^2}$ 在 $t = 0$ 时达到最大值. 于是, $\varphi'_y(0) = 0$. 注意到

$$\begin{aligned}\varphi'_y(0) &= \frac{(Ay, x_0) + (Ax_0, y)}{\|x_0\|^2} - \frac{(Ax_0, x_0) \cdot [(y, x_0) + (x_0, y)]}{\|x_0\|^4} \\ &= 2\operatorname{Re}(y, Ax_0) - 2\operatorname{Re}(y, \lambda x_0) \\ &= 2\operatorname{Re}(y, Ax_0 - \lambda x_0)\end{aligned}$$

由 y 的任意性, $Ax_0 = \lambda x_0$. □

定理 6.42. (Hilbert – Schmidt): X 是 Hilbert 空间, A 是紧对称算子, 则有至多可数非零实数 $\{\lambda_i\}$ 及一组正交规范基 $\{e_i\}$ 使得

$$x = \sum (x, e_i)e_i, \quad Ax = \sum \lambda_i (x, e_i)e_i, \forall x \in X$$

证明. 注意到 $\forall \lambda \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}$, 在 $\ker(\lambda I - A)$ 取一组规范正交基 E_λ, 把所有 E_λ 的并记为 $\{\varepsilon_i\}$, 至多可数. 若 $0 \in \sigma_p(A)$, 把 $\ker(A)$ 中的正交规范基记为 $\{\varepsilon'_i\}$, 可能不可数. 令

$$\{e_i\} := \begin{cases}\{\varepsilon_i\}, & 0 \notin \sigma_p(A) \\ \{\varepsilon_i\} \cup \{\varepsilon'_i\}, & 0 \in \sigma_p(A)\end{cases}$$

$M := \mathrm{Span}\{e_i\}$. 下证 $\overline{M} = X$. 反证, 假设 $\overline{M} \neq X$, 则 $M^{\perp} \neq \{0\}$. 记 $\widetilde{A} = A|_{M^{\perp}}$. 注意到 $\widetilde{A}$ 在 $M^{\perp}$ 无特征值. 然而, 根据定理(6.41)知 $\lambda = \sup\limits_{x \in M^{\perp}, \|x\|=1} \left|(\widetilde{A}x, x)\right|$ 是 $\widetilde{A}$ 的特征值, 矛盾. □

约定: 把特征值按绝对值大小并计重数, 作如下排列

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots$$

于是, 按正负值可有如下:

$$\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \cdots \geq 0$$

$$\lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq \cdots \leq 0$$

对应的特征向量分别为 $e_1^+, e_2^+, \cdots$ 和 $e_1^-, e_2^-, \cdots$

定理 6.43. *(极大极小刻画)* : X 是 Hilbert 空间, A 是紧对称算子. 则有

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^{\perp} \backslash \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^{\perp} \backslash \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

其中 E_{n-1} 为 X 的任意 $n-1$ 维线性子空间.

证明. 只证明第一个等式. 设 $x = \sum a_i^+ e_i^+ + \sum a_i^- e_i^-$, 则

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum \lambda_i^+ \left|a_i^+\right|^2 + \sum \lambda_i^- \left|a_i^-\right|^2}{\sum \left|a_i^+\right|^2 + \sum \left|a_i^-\right|^2}$$

记 $\mu_n := \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\limits_{x \in E_{n-1}^{\perp} \backslash \{0\}} \dfrac{(Ax, x)}{(x, x)}$, 则

(1) $\lambda_n^+ \leq \mu_n$

对任意 E_{n-1}, 在 $\mathrm{Span}\{e_1^+, \cdots, e_n^+\}$ 中总有 $x_n \neq 0$ 使得 $x_n \perp E_{n-1}$. 于是

$$\sup_{x \perp E_{n-1} \backslash \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geq \frac{(Ax_n, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^+ \left|a_i^+\right|^2}{\sum_{i=1}^n \left|a_i^+\right|^2} \geq \lambda_n^+$$

(2) $\lambda_n^+ \geq \mu_n$
取 $E_{n-1} = \mathrm{Span}\{e_1^+, \cdots, e_{n-1}^+\}$, 有

$$\lambda_n^+ = \sup_{x \perp E_{n-1} \setminus \{0\}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}$$

由 μ_n 的定义, $\mu_n \leq \lambda_n^+$. □

6.6 Fredholm 算子

本节介绍 Fredholm 算子的定义, 刻画及 Fredholm 算子指标的性质.

6.6.1 Fredholm 算子

定义 6.44. X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. 若 T 满足:
(1) $R(T) \subset Y$ 闭.
(2) $\dim\ker(T) < +\infty$
称 T 为一个 Fredholm 算子, $\mathrm{ind}(T) := \dim\ker(T) - \mathrm{codim}R(T)$ 称为 T 的指标 (index).

[注记:(1) 所有 Fredholm 算子构成的集合记为 $\mathscr{F}(X,Y)$, $\mathscr{F}(X) := \mathscr{F}(X,X)$.
(2) $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则 $\mathrm{ind}(I-A) = 0$.]

定理 6.45. *(1)* $T \in \mathscr{F}(X,Y)$, 则 $\exists S \in \mathscr{L}(Y,X)$, $A \in \mathfrak{C}(X), A_2 \in \mathfrak{C}(Y)$ 使得

$$ST = I_X - A_1, TS = I_Y - A_2$$

(2) $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. 若 $\exists S_1, S_2 \in \mathscr{L}(Y,X)$,$A_1 \in \mathfrak{C}(X), A_2 \in \mathfrak{C}(Y)$ 使得 $S_1T = I_X - A_1, TS_2 = I_Y - A_2$, 则 $T \in \mathscr{F}(X,Y)$.

证明. 注意到 $\dim\ker T < +\infty, \mathrm{codim}R(T) = \dim Y/R(T) < +\infty$, 视 $Y/R(T)$ 为 Y 中的一个有限维子空间. 根据性质 (6.27)证明 (2) 的构造, 存在有限秩算子 (紧)$A_1 : X \to \ker(T)$, $A_2 : Y \to Y/R(T)$, 满足 $A_1|_{\ker T} = \mathrm{Id}_{\ker(T)}$, $A_2 = \mathrm{Id}_{Y/R(T)}$.

又 $\ker T \subset X, R(T) \subset Y$ 闭, 有直和分解:

$$X = \ker T \oplus X/\ker T, \quad Y = Y/R(T) \oplus R(T)$$

且 $(I_X - A_1)|_{\ker T} = 0, (I_Y - A_2)|_{Y/R(T)} = 0, (I_Y - A_2)|_{R(T)} = \mathrm{Id}_{R(T)}, (I_X - A_1)|_{X/\ker T} = \mathrm{Id}_{X/\ker T}$. 作 $\widetilde{T} : X/\ker T \to R(T), [x] \mapsto Tx$. 由 $X/\ker T, R(T)$ 闭, $\widetilde{T}$ 双射且连续, 根据 Banach 逆算子定义, $\widetilde{T}$ 有有界逆 $\widetilde{T}^{-1}$. 注意到 $T = \widetilde{T}(I_X - A_1)$, $\widetilde{T} = (I_Y - A_2)\widetilde{T}$, $\widetilde{T}^{-1} = (I_X - A_1)\widetilde{T}^{-1}$, 作 $S := \widetilde{T}^{-1}(I_Y - A_2)$, 则有

$$ST = \widetilde{T}^{-1}(I_Y - A_2)T = \widetilde{T}^{-1}(I_Y - A_2)\widetilde{T}(I_X - A_1) = \widetilde{T}^{-1}\widetilde{T}(I_X - A_1) = I_X - A_1$$

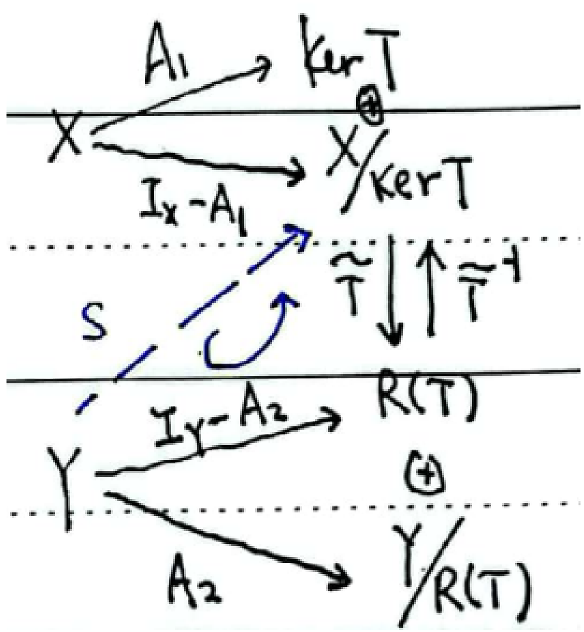
$$TS = \widetilde{T}(I_X - A_1)\widetilde{T}^{-1}(I_Y - A_2) = \widetilde{T}\widetilde{T}^{-1}(I_Y - A_2) = I_Y - A_2$$

(2) 设 S_1, S_2, A_1, A_2 如条件所述, 则

$$\ker(T) \subset \ker(S_1 T) = \ker(I_X - A_1), \dim\ker T \leq \dim\ker(I_X, A_1) < +\infty$$

另一方面, $R(T) \supseteq R(TS_2) = R(I_Y - A_2)$, $\mathrm{codim}R(T) < \mathrm{codim}R(I_Y - A_2) < +\infty$. 又 $R(T) \supseteq R(TS_2)$ 及 $\mathrm{codim}R(TS_2) < +\infty$, 知存在有限维子空间 N 使得 $R(T) = R(TS_2) \oplus N$, 从而 $R(T)$ 闭. □

[注记:(i) 由 (2) 知 (1) 中的 $S \in \mathscr{F}(Y, X)$,(ii) 定理的证明可以由下图描述.]



6.6.2 Fredholm 算子指标的性质

定理 6.46. X, Y, Z 是 Banach 空间, $T_1 \in \mathscr{F}(X,Y), T_2 \in \mathscr{F}(Y,Z)$, 则 $T_2T_1 \in \mathscr{F}(X,Z)$ 且 $\mathrm{ind}(T_2T_1) = \mathrm{ind}(T_1) + \mathrm{ind}(T_2)$

证明. (1) $T_2T_1 \in \mathscr{F}(X,Z)$
根据定理(6.45),$\exists S_1 \in \mathscr{L}(Y,X)$, $S_2 \in \mathscr{L}(Z,Y)$, $A_{11} \in \mathfrak{C}(X), A_{12} \in \mathfrak{C}(Y)$, $A_{21} \in \mathfrak{C}(Y), A_{22} \in \mathfrak{C}(Z)$ 使得

$$S_1T_1 = I_X - A_{11}, T_1S_1 = I_Y - A_{12}, S_2T_2 = I_Y - A_{21}, T_2S_2 = I_Z - A_{22}$$

令 $S = S_1S_2 \in \mathscr{L}(Z,X)$, 则

$$ST_2T_1 = S_1S_2T_2T_1 = S_1(I_Y - A_{21})T_1 = S_1T_1 - S_1A_{21}T_1 = I_X - (A_{11} + S_1A_{21}T_1)$$

$$T_2T_1S = T_2T_1S_1S_2 = T_2(I_Y - A_{12})S_2 = T_2S_2 - T_2A_{12}S_2 = I_Z - (A_{22} + T_2A_{12}S_2)$$

由定理 (6.45) 知 $T_2T_1 \in \mathscr{F}(X,Z)$.
(2) $\mathrm{ind}(T_2T_1) = \mathrm{ind}(T_1) + \mathrm{ind}(T_2)$
取 $Y_2 = R(T_1) \cap \ker(T_2)$, 则 $\dim Y_2 < +\infty$. 取闭子空间 Y_1, Y_3 使得:

$$R(T_1) = Y_1 \oplus Y_2, \ker T_2 = Y_2 \oplus Y_3$$

注意到 $\dim Y/(\ker T_2 + Y_1) \leq \dim Y/(Y_1 + Y_2) = \mathrm{codim} R(T_1) < +\infty$. 取闭子空间 $Y_4, \dim Y_4 < +\infty$ 使得 $Y/\ker T_2 = Y_1 \oplus Y_4$. 作 $\widetilde{T_1} : X/\ker T_1 \to R(T_1), \widetilde{T_2} : Y/\ker T_2 \to R(T_2)$, 则 $\widetilde{T_1}, \widetilde{T_2}$ 同构. 注意到

$$\ker(T_2T_1) = \ker T_1 \oplus \widetilde{T_1}^{-1} Y_2, R(T_2) = R(T_2T_1) \oplus \widetilde{T_2} Y_4$$

于是有

$$\dim \ker(T_2T_1) = \dim \ker T_1 + \dim Y_2$$

$$\mathrm{codim} R(T_2T_1) = \mathrm{codim} R(T_2) + \dim Y_4$$

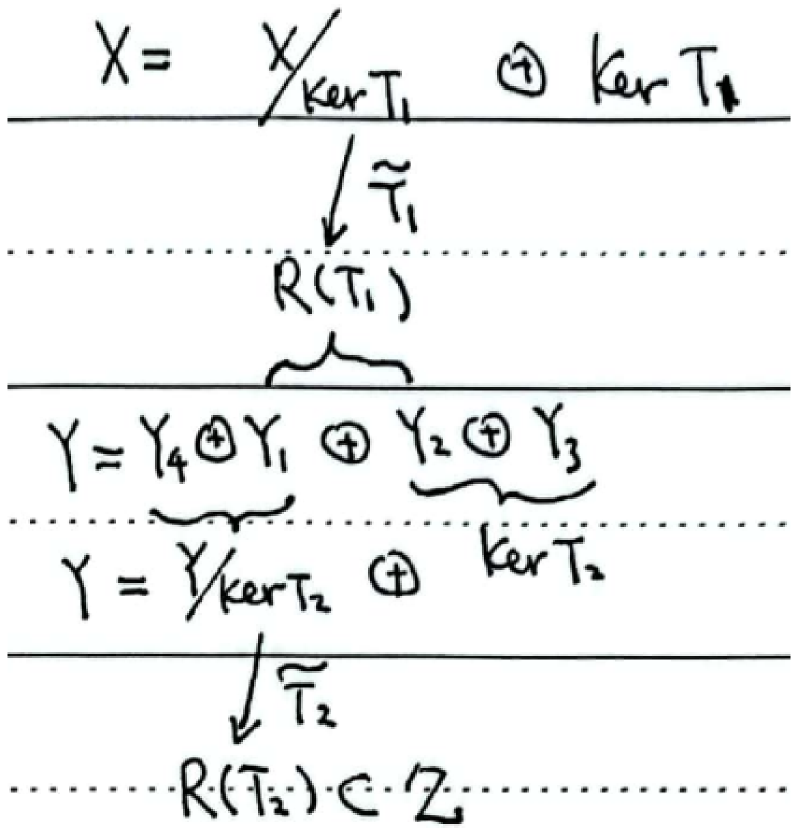
又

$$\mathrm{codim} R(T_1) = \dim Y_3 + \dim Y_4$$

$$\dim \ker(T_2) = \dim Y_2 + \dim Y_3$$

所以

$$\operatorname{ind}(T_2T_1) = \dim \ker(T_2T_1) - \operatorname{codim} R(T_2T_1) = \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2)$$



□

定理 6.47. X, Y 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{F}(X,Y)$，则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得当 $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ 且当 $\|S\| \le \varepsilon$ 时，有 $T+S \in \mathscr{F}(X,Y)$ 且 $\operatorname{ind}(T+S) = \operatorname{ind}(T)$.

证明. 根据定理 (6.45), $\exists R \in \mathscr{F}(Y,X), A_1 \in \mathfrak{C}(X), A_2 \in \mathfrak{C}(Y)$ 使得

$$RT = I_X - A_1, TR = I_Y - A_1$$

对 $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ 有

$$R(T+S) = I_X - A_1 + RS, (T+S)R = I_Y - A_2 + SR$$

注意到当 $\|S\| < \dfrac{1}{\|R\|}$ 时, $I_X + RS, I_Y + SR$ 均可逆. 此时, 有

$$(I_X + RS)^{-1}R(T+S) = I_X - (I_X+RS)^{-1}A_1$$

$$(T+S)R(I_Y+SR)^{-1} = I_Y - A_2(I_Y+SR)^{-1}$$

由定理 (6.45)知 $T+S \in \mathscr{F}(X,Y)$. 注意到 $I-A$(紧), 以及可逆算子的指标为 0, 由上面的式子得到

$$\mathrm{ind}R + \mathrm{ind}T = 0, \mathrm{ind}R + \mathrm{ind}(T+S) = 0$$

即 $\mathrm{ind}T = \mathrm{ind}(T+S)$. □

7 一些补充内容和总结

7.1 完备度量空间的刻画-闭球套定理

定理 7.1. 闭球套定理: 设 (X,ρ) 为完备的度量空间, $K_n = \overline{B(x_n,r_n)}$ 是 X 中的一列闭球, 并且满足 $K_1 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$(称为闭球套). 若半径 $\{r_n\}$ 构成的序列 $\{r_n\} \to 0(n\to+\infty)$, 则存在 X 中唯一的一个点 x_0 含于所有的球中.

证明. (i) 存在性: 考虑球的中心构成的序列 $\{x_n\}$. 若 $m > n$, 则有 $K_m \subset K_n$, $x_m \in K_n$, 即 $\rho(x_m,x_n) \le r_n$, 因此 $\rho(x_m,x_n) \to 0(n,m\to+\infty)$, 即 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列, 由 X 的完备知存在 $x_0 \in X$ 使得 $x_n \xrightarrow{\rho} x_0(n\to+\infty)$. 下证 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. 任取一个 K_{n_0}, 当 $n \ge n_0$ 时 $x_n \in K_{n_0}$, 由 K_{n_0} 闭知 $x_0 \in K_{n_0}$, 因此 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

(ii) 唯一性: 若存在 $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, 则 $\forall n = 1,2,\cdots$,

$$\rho(x_0,y_0) \le \rho(x_0,x_n) + \rho(x_n,y_0) \le 2r_n \to 0(n\to+\infty)$$

因此 $x_0 = y_0$. □

闭球套定理的逆命题也成立

性质 7.2. 若度量空间 (X,ρ) 满足: 任意一列闭球套 $K_n = \overline{B(x_n, r_n)}, K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ 满足半径 $r_n \to 0(n \to +\infty)$ 均有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$, 则 X 完备.

证明. (i) 任取 X 中的基本列 $\{x_n\}$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 使得

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

记 $K_k = \overline{B\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)}(k = 1, 2, \cdots)$, 则 $K_k \supset K_{k+1} \supset \cdots$, 即 $\{K_k\}$ 为一列闭球套. 事实上, $\forall x \in K_{k+1}$,

$$\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

则 $x \in K_k$, 且闭球 $\{K_k\}$ 半径构成的序列 $\left\{\frac{1}{2^{k-1}}\right\} \to 0(k \to +\infty)$, 由假设知, $\exists x_0 \in X$ 使得 $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_k$.

(ii) 证明 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$. 因 $x_0 \in K_k(\forall k = 1, 2, \cdots)$ 有

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \frac{1}{2^{k-1}}$$

注意到 $\{x_n\}$ 为基本列, 当 $n \to +\infty, k \to +\infty$ 有 $\rho(x_n, x_{n_k}) \to 0, \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$, 因此 $x_n \xrightarrow{\rho} x_0(n \to +\infty)$. 因此 X 完备. □

用闭球套定理证明 Baire 纲定理的等价叙述

定理 7.3. Baire 纲: 设 (X,ρ) 为完备度量空间, $(O_n)_{n\geq 1}$ 为 X 中一列开的稠密子集, 则 $O = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n$ 在 X 中稠密.

证明. 要证: 任取 X 中的非空开集 U, 有 $U\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n\right)\neq\varnothing$. 任取 X 中的非空开集 U, 由 O_1 在 X 中稠, $U\cap O_1\neq\varnothing$, 存在闭球 $F_1\subset U\cap O_1$(F_1 半径为 r_1); 由 O_2 在 X 中稠密, $\mathring{F}_1\cap O_2\neq\varnothing$, 存在闭球 $F_2\subset\mathring{F}_1\cap O_2$, 且设 F_2 半径 $r_2\leq\dfrac{r_1}{2}$,$\cdots$, 由 O_n 在 X 中稠密, $\mathring{F}_{n-1}\cap O_n\neq\varnothing$, 存在闭球 $F_n\subset\mathring{F}_{n-1}\cap O_n$, 且设 F_n 半径 $r_n\leq\dfrac{r_{n-1}}{2}$, 一直进行下去, 得到一列非空的闭球序列 $(F_n)_{n\geq1}$, 且 $F_{n+1}\subset\mathring{F}_n\cap O_{n+1}$, 且 F_{n+1} 半径 $r_{n+1}\leq\dfrac{r_1}{2^n}(\forall n\in\mathbb{N}_+)$, 因 X 完备, 由闭球套定理存在唯一的 $x\in X$ 使得 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 因此 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 且 $x\in F_1\subset U$, 因此 $x\in U\cap O\neq\varnothing$, 即 $\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 在 X 中稠密. □

[注记: 证明方法不唯一, 此叙述与完备度量空间均为第二纲集等价.]

7.2 第一纲集, 第二纲集有关性质

性质 7.4. *若 X 为度量空间, $A\subset B\subset X$.*
(1) 若 B 为第一纲集, 则 A 也为第一纲集.
(2) 若 A 为第二纲集, 则 B 也为第二纲集.

证明. (1) 若 B 为第一纲集, 设 $B=\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k$, E_k 为疏集, 由 $A\subset B$ 有 $A=A\cap B=\bigcup_{k=1}^{+\infty}(A\cap E_k)$. 注意到疏集的子集仍为疏集, A 为第一纲集.
(2) 反证, 若 B 是第一纲集, 则由 (1) 知 A 也为第一纲集, 矛盾. □

性质 7.5. *设 X 为度量空间, $A\subset X$ 闭子集且为第二纲集, 则 A 包含 X 中某个闭球.*

证明. 由 A 为第二纲集知 A 为非疏集 (否则 A 为第一纲集), 故 $\mathring{\overline{A}}=\mathring{A}\neq\varnothing$, 因此存在球 $B(x_0,r_0)\subset A$, 取 $\overline{B\left(x_0,\dfrac{r_0}{2}\right)}\subset A$ 即可. □

性质 7.6. 设 X 为完备的度量空间, $G \subset X$ 非空开集, 则 G 为第二纲集.

证明. 设 $G \subset X$ 为非空开集, 则存在闭球 $S \subset G$, 由 X 完备知 S 完备, 即 S 为第二纲集, 由 (7.4)知 G 为第二纲集. □

性质 7.7. 若 E_1, E_2 均为度量空间 (X, ρ) 的疏集, 则 $E_1 \cup E_2$ 也为疏集.

证明. 要证 $\overset{\circ}{\overline{E_1 \cup E_2}} = \varnothing$, 反证, 若 $x \in \overset{\circ}{\overline{E_1 \cup E_2}}$, 则存在 $B(x,r) \subset \overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$. 不妨设 $x \in \overline{E_1}$, 由 E_1 为疏集知存在 $B(x_1, r_1) \subset B(x,r)$ 使得 $\overline{B(x_1,r_1)} \cap \overline{E_1} = \varnothing$, 从而 $B(x_1, r_1) \subset \overline{E_2}$, 与 $\overset{\circ}{\overline{E_2}} = \varnothing$ 矛盾. 因此 $E_1 \cup E_2$ 也为疏集. □

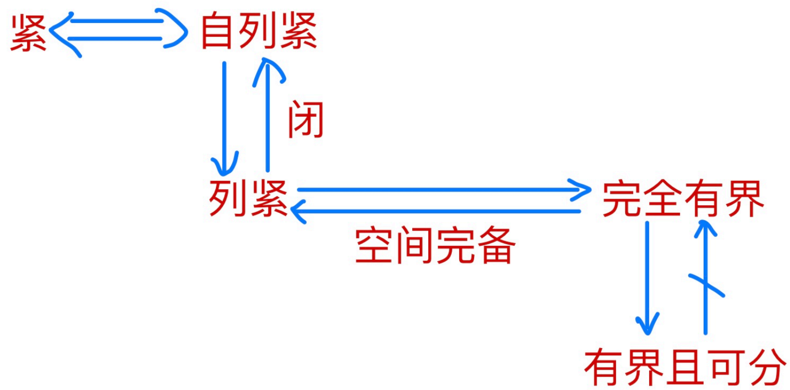
性质 7.8. 赋范线性空间 X 真闭子空间 L 是疏集.

证明. 即证: 只要 $\overset{\circ}{L} \neq \varnothing$, 一定有 $\overline{L} = L = X$, 矛盾于 $L \neq X$. 设 $a \in \overset{\circ}{\overline{L}} = \overset{\circ}{L}$, 则存在 $r > 0$, 使得 $B(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\} \subset \overline{L}$, 设 x 为 X 中任意一个元素, 若 $x \neq 0$, 设 $y = a + \dfrac{r}{2\|x\|} \cdot x$, 则 $\|y - a\| = \dfrac{r}{2} < r$, 因此, $y \in B(a,r) \subset \overline{L}$. 因 L 是子空间, $x = \dfrac{2\|x\|}{r}(y - a) \in \overline{L}$, 因此 $\overline{L} = X$, 又 $\overline{L} = L \neq X$ 矛盾. 因此 $\overset{\circ}{\overline{L}} = \varnothing$, 即 L 是疏集. □

性质 7.9. 单点集为疏集, 但可列个单点集的并不一定为疏集, 如有理数集 $\mathbb{Q}$.

7.3 紧性

各种紧性有关概念关系如图



> **性质 7.10.** 设实泛函 $f(\cdot)$, $f_n(\cdot)(n=1,2,3,\cdots)$ 在紧空间 X 上连续. 若 $\{f_n(\cdot)\}$ 是单调增泛函序列, 且 $\forall x\in X$, 有 $f_n(x)\to f(x)$, 则 $f_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$.

证明. 任取 $\varepsilon>0$, 令 $G_n=\{x\in X:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$, 则由 f_n 为单调泛函序列知 G_n 为单调递增集合列, 且 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty}G_k=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}G_n$. 事实上, $\forall x\in X, f_n(x)\to f(x)$, 则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 对 $\forall n>N$ 有 $|f_n-f|<\varepsilon$, 即 $x\in G_n$, 故等式成立. 由函数连续性知 G_n 为开集, 因此 $\{G_n\}$ 是 X 的一个开覆盖, 由 X 紧, $\exists N$ 使得 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{N}G_n=G_N$, 即 $X=G_N=G_{N+1}=\cdots$, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$ 时,$\forall x\in X$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 即 $f_n(x)$ 在 X 上一致收敛. □

[注记: 紧空间单调逐点收敛 $\Longrightarrow$ 一致收敛]

性质 7.11. *设 E_1, E_2 是赋范空间 X 的子集, $E_1+E_2=\{x+y \mid x\in E_1, y\in E_2\}$, 则有*
(1) 若 E_1 或者 E_2 为开集, 则 E_1+E_2 为开集.
(2) 若 E_1 和 E_2 均为紧集, 则 E_1+E_2 为紧集.
(3) 若 E_1 紧, E_2 为闭集, 则 E_1+E_2 为闭集.
(4) 若 E_1, E_2 均为闭集, E_1+E_2 未必为闭集.

证明. (1) 任取 $c\in E_1+E_2$, $\exists a\in E_1, b\in E_2$ 使得 $c=a+b$. 设 E_1 开, 则存在 $r>0$ 使得 $B(a,r)\subset E_1$, 则 $B(c,r)\subset E_1+E_2$. 事实上, 任取 $z\in X$ 满足 $\|z-c\|<r$, 若 $x=z-b$, 则 $x-a=z-c$, 即 $\|x-a\|=\|z-c\|<r$, 故 $x\in E_1$, 因此 $z=x+b\in E_1+E_2$. 从而 E_1+E_2 为开集.
(2) 只需证 E_1+E_2 自列紧即可. 任取 E_1+E_2 中的序列 $\{z_n\}$, 存在 $\{x_n\}\subset E_1, \{y_n\}\subset E_2$ 使得 $z_n=x_n+y_n$, 由 E_1 紧, 存在 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 使得 $x_{n_k}\to x_0\in E_1$; 由 E_2 紧, 存在 $\{y_{n_{k_j}}\}\subset\{y_{n_k}\}$ 使得 $y_{n_{k_j}}\to y_0\in E_2$. 于是 $\{z_{n_{k_j}}=x_{n_{k_j}}+y_{n_{k_j}}\}\subset\{z_n\}$ 使得 $z_{n_{k_j}}\to x_0+y_0\in E_1+E_2$, 因此 E_1+E_2 自列紧.
(3) 若 $z_n=x_n+y_n\to z$, $\{x_n\}\subset E_1, \{y_n\}\subset E_2$, 下证 $z\in E_1+E_2$. 由 E_1 紧, 存在子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 使得 $x_{n_k}\to x\in E_1$, 于是 $y_{n_k}=z_{n_k}-x_{n_k}\to z-x$, 由 E_2 闭知 $z-x\in E_2$, 即 $z\in E_1+E_2$, 故 E_1+E_2 为闭集.
(4) 取 $X=\mathbb{R}$, 考虑集合 $E_1=\left\{n+\dfrac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}, E_2=\{-n:n\in\mathbb{N}\}, E_1, E_2$ 均无极限点, 故 E_1+E_2 闭. 而 $\forall p\geq 2, n\geq 1, p+\dfrac{1}{n+p}=n+p+\dfrac{1}{n+p}+(-n)\in E_1+E_2$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}p+\dfrac{1}{n+p}=p$, 但 $p\notin E_1+E_2$. 事实上, 若 $p\in E_1+E_2$, 则 $p=\left(n+\dfrac{1}{n}\right)+(-m)$, 即 $n(m+p-n)=1$, 只有 $n=1, m=2-p$ 时上式才成立, 若 $p\geq 2$, 则 $p\notin E_1+E_2$, 因此 E_1+E_2 不是闭集. □

性质 7.12. *设 E_1, E_2 是赋范空间 X 中的子集, 若 E_1 紧, E_2 闭且 $E_1\cap E_2=\varnothing$, 证明: 存在 $r>0$, 使得 $(E_1+B(0,r))\cap E_2=\varnothing$.*

证明. 令 $g(x)=\rho(x,E_2)=\inf\{\|x-y\|:y\in E_2\}, \forall x\in X$, 则 g 是 X 上的连续函数. 因为 E_1 紧, $\exists x_1\in E$, 使得 $g(x_1)=\min\limits_{x\in E_1}g(x)$. 因 $x_1\notin E_2$ 且 E_2 闭知

$g(x_1)=\rho(x_1,E_2)>0$. 设 $0<r<g(x_1)$, 则 $(E_1+B(0,r))\cap E_2=\varnothing$. 事实上, 若存在 $x\in(E_1+B(0,r))\cap E_2$, 则 $x\in E_2$, $x=y+z(y\in E_1,z\in B(0,r))$. 故

$$g(y)=\rho(y,E_2)\leq\rho(y,x)=\|x-y\|=\|z\|<r<g(x_1)$$

但由 $y\in E_1$, 有 $g(x_1)\leq g(y)$ 矛盾. 因此 $(E_1+B(0,r))\cap E_2=\varnothing$. □

性质 7.13. 有限维赋范空间的又一等价刻画: $(X,\|\cdot\|)$ 为有限维赋范空间当且仅当 X 是局部紧的.

[注: 称拓扑空间 X 是 局部紧的, 如果 $\forall x\in X$, 存在 x 的紧的邻域.]

证明. $(\Longrightarrow)$ 若 X 为有限维赋范空间, $\forall x_0\in X$, 则 $\overline{B(x_0,1)}=\{x\in X\mid\|x-x_0\|\leq1\}$ 是 X 的闭子集, 因而 $\overline{B(x_0,1)}$ 是紧集且为 x_0 的邻域, 因此 X 是局部紧的.

$(\Longleftarrow)$ 若 X 为局部紧赋范空间, 则 $\exists X$ 中一紧集 E 以 O 为内点. 此时 E 完全有界, 且 $\exists r>0$ 使得 $B(0,r)\subset E$, 故 $B(0,r)$ 完全有界. 即存在有限个开球 $B\left(x_i,\dfrac{1}{4}\right)(i=1,2,\cdots,n)$ 使得 $B(0,r)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B\left(x_i,\dfrac{1}{4}\right)$.

设 $Y=\mathrm{Span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则 Y 有限维, 因此 Y 闭. 若 $Y\neq X$, 则由 Riesz 引理, 存在 $x_0\in X,\|x_0\|=1$ 且 $\rho(x_0,Y)\geq\dfrac{3}{4}$. 因为 $\dfrac{rx_0}{2}\in B(0,r)$, 存在 i 使得 $\dfrac{rx_0}{2}\in B\left(x_i,\dfrac{r}{4}\right)$. 因此, $\left\|\dfrac{rx_0}{2}-x_i\right\|<\dfrac{r}{4}$, 即 $\left\|x_0-\dfrac{2x_i}{r}\right\|<\dfrac{1}{2}$, 又因为 $\rho(x_0,Y)\geq\dfrac{3}{4}$ 有 $\dfrac{2x_i}{Y}\notin Y$ 矛盾于 $\dfrac{2x_i}{r}\in Y$, 故 $Y=X$, 即 X 是有限维的. □

[注记:(1) 若赋范空间 X 中的球 $B(0,r)$ 是完全有界的, 则 X 是有限维的. (2) 本题是如何应用 Riesz 引理的例子.]

性质 7.14. X 为度量空间, 若 X 中每个完全有界集均为列紧集, 则 X 完备.

证明. 任取 X 中的基本列 $\{x_n\}$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 对 $\forall n,m\geq N$, 有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. 从而 $\{x_1,\cdots x_N\}$ 是 $\{x_n\}$ 的有穷 ε 网, 即 $\{x_n\}$ 完全有界. 由假设知 $\{x_n\}$ 列紧, 有收敛子列, 因而基本列 $\{x_n\}$ 本身也收敛, 从而 (X,ρ) 完备. □

性质 7.15. X 为赋范空间, A 是 X 中的有界集, 则 A 完全有界当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, 存在有限维空间 $X_\varepsilon\subset X$ 使 A 中每个点和 X_ε 的距离均小于 ε.

[注记:有界集成为完全有界集的条件.]

证明. ($\Longrightarrow$) 若 A 完全有界, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists x_1,x_2,\cdots,x_N\in A$ 使得 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}B(x_i,\varepsilon)$. 令 $X_\varepsilon=\mathrm{Span}\{x_1,\cdots,x_N\}$, 则 X_ε 为有限维空间且 $\forall x\in A,\rho(x,X_\varepsilon)\leq\rho(x,x_i)<\varepsilon$.

($\Longleftarrow$) 设 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 有限维空间 $X_{\frac{\varepsilon}{2}}\subset X$ 使得 $x\in A$ 时, $\rho(x,X_{\frac{\varepsilon}{2}})<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 取

$$B=\left\{y\in X_{\frac{\varepsilon}{2}}\middle|\exists x\in A\ \text{s.t.}\ \rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

即 B 表示 A 的 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 邻域中 $X_{\frac{\varepsilon}{2}}$ 的点. 由 A 有界知 B 在 $X_{\frac{\varepsilon}{2}}$ 中有界, 因此 B 是列紧集, 从而完全有界. 设 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 是 B 的 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 网, 下证其为 A 的 ε 网. 任取 $x\in A,\exists y\in X_{\frac{\varepsilon}{2}}$ 使得 $\rho(x,y)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 故 $y\in B$, 于是 $\exists i$ 使得 $\rho(y_i,y)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\rho(x,y_i)\leq\rho(x,y)+\rho(y,y_i)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此 A 完全有界. □

性质 7.16. A 是度量空间 X 中的子集, 则 A 完全有界当且仅当 $\forall\varepsilon>0,\forall B\subset A$, 当 B 中任意两点之间的距离均不小于 ε 时, B 为有限集.

证明. ($\Longrightarrow$) A 完全有界, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists a_1,\cdots,a_k\in X$, 使得 $A\subset\bigcap\limits_{i=1}^{k}B\left(a_i,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. 任取 $B\subset A$, 当 B 中点多于 k 个时, 必存在 $B\left(a_i,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 包含 B 中两个点, 此两点之间距离小于 ε, 即 B 中点个数不超过 k.

($\Longleftarrow$) 若 A 不是完全有界, $\exists\varepsilon>0$, 使得 A 无有穷 ε 网, 即对 $x_1\in A,\exists x_2\in A$ 使得 $\rho(x_1,x_2)\geq\varepsilon$. 对上述 $x_1,x_2,\exists x_3\in A$ 使得 $\rho(x_3,x_i)\geq\varepsilon(i=1,2)$, $\cdots$ 一直进行下去, 存在 $\{x_n\}\subset A$, 使得 $\forall m\neq n$, 有 $\rho(x_m,x_n)\geq\varepsilon$, 可见 $\{x_n\}$ 是无限集, 矛盾于假设. □

7.4 集合列紧性判别法补充

性质 7.17. ℓ^p 空间中子集列紧的判定:

$$\ell^p(1 \le p < +\infty) = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \middle| \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

$A \subset \ell^p$ 列紧当且仅当

(1) $\exists K > 0, \forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$ 有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\xi|^p < K$,即集合 A 有界

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $m > N$ 时, $\forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$ 有 $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} |\xi_n|^p < \varepsilon$

证明. $(\Longrightarrow)$ (1) A 列紧则 A 完全有界, 则 A 有界, 即存在 $K^{\frac{1}{p}} > 0, \rho(x, 0) = \left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < K^{\frac{1}{p}} (\forall x \in A)$, 故 (1) 成立.

(2) A 完全有界则 A 存在有穷的 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ 网 $N = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$.

(i) 由 $x_i \in \ell^p (1 \le i \le n_0)$,$\forall \varepsilon > 0, \exists N_i > 0$, 当 $m > N_i$ 时有 $\left(\sum\limits_{n=m}^{+\infty} \left| \xi_n^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$. 再取 $N = \max\{N_1, \cdots, N_{n_0}\}$ 有 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $m > N$ 时, $\forall x \in N$, $\left(\sum\limits_{n=m}^{+\infty} \left| \xi_n^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$

(ii) 由 N 是 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ 网, $\forall x \in A, \exists x_i \in N$ 使得

$$\rho(x, x_i) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \xi_n - \xi_n^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

故

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \left| \xi_n - \xi_n^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \left| \xi_n^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Minkowski不等式)} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}} = \varepsilon^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=m}^{+\infty}|\xi_n|^p<\varepsilon$, (2) 成立.

$(\Longleftarrow)$ 由于 ℓ^p 完备, A 列紧当且仅当 $\forall\varepsilon>0, A$ 有列紧的 ε 网, 下证 A 存在列紧的 ε 网. 由 (2) 知, 从 x 的第 N 项之后 $\sum\limits_{n=m}^{+\infty}|\xi_n|^p<\varepsilon$, 令

$$B=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N,0,0,\cdots,0,\cdots)\mid x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in A\}$$

即保留 A 中每个元素的前 N 项后面全变为 0. 则有:

(i) B 是 A 的 ε 网, 事实上, 由 (2) $\forall\varepsilon>0,\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in A,\exists N>0$, 取 $\widetilde{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_N,0,\cdots)\in B$ 有

$$\rho(x,\widetilde{x})=\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

(ii) B 是列紧的. 取 B 中一列点列 $y_1,y_2,\cdots,y_k,\cdots$, 其中

$$y_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_N^{(k)},0,\cdots)$$

由 (1) 知 $\forall y=(\xi^1,\cdots,\xi^N,0,\cdots)\in B$, $\forall 1\le i\le N$ 有 $|\xi^n|\le K^{\frac{1}{p}}$, 即对每个位置 n 而言 $\{\xi_n^{(k)}\}$ 构成 $\mathbb{R}$ 中有界序列, 必有收敛子列. 因此使用老套路 (对角线抽子列的方法) : 对 $\{\xi_1^{(k)}\}$, 存在 $\{\xi_1^{(k_{1n})}\}\subset\{\xi_1^{(k)}\}$ 使得 $\xi_1^{(k_{1n})}\to\xi_1^{(0)}, n\to+\infty$, 此时得 $\{y_k\}$ 的子列 $\{y_{k_{1n}}\}$; 对 $\{\xi_2^{(k_{1n})}\}$, 存在 $\{\xi_2^{(k_{2n})}\}\subset\{\xi_2^{(k_{1n})}\}$ 使得 $\xi_2^{(k_{2n})}\to\xi_2^{(0)}, n\to+\infty$, 此时得到 $\{y_{k_{1n}}\}$ 的子列 $\{y_{k_{2n}}\}$; $\cdots$ 对 $\{\xi_N^{(k_{(N-1)n})}\}$, 存在 $\{\xi_N^{(k_{Nn})}\}\subset\{\xi_N^{(k_{(N-1)n})}\}$ 使得 $\xi_N^{(k_{Nn})}\to\xi_N^{(0)}, n\to+\infty$, 此时得 $\{y_{k_{(N-1)n}}\}$ 的子列 $\{y_{k_{Nn}}\}$. 令 $y=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_N^{(0)},0,\cdots)$, 则 $y\in\ell^p$ 且

$$\rho(y_{k_{Nn}},y)=\left(\sum_{l=1}^{N}\left|\xi_l^{(k_{Nn})}-\xi_l^{(0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0(n\to+\infty)$$

因此 B 列紧. □

7.5 有关线性基

性质 7.18. Banach 空间不可能有可数的线性基.

证明. 设 X 为无穷维 Banach 空间且有可数的线性基 $\{x_1, x_2, \cdots\}$. 令

$$Y_n = \mathrm{Span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, n = 1, 2, \cdots, V_n = X \backslash Y_n$$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} Y_n = X, \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} V_n = \varnothing$. 因 Y_n 为有限维在 X 中闭, 则 V_n 开, 由 Baire 纲定理 (完备度量空间中可数个开的稠密子集的交在 X 中稠密) 知存在 n_0 使得 $\overline{V_{n_0}} \neq X$. 下证 $Y_{n_0} = X$ 从而矛盾于 X 无穷维.
设 $a \in X$ 且 $a \notin \overline{V_{n_0}}$, 则存在 $B(a, r) \subset Y_{n_0}$. 任取 $x \in X, \exists \delta > 0$ 使得 $\delta \|x - a\| < r$, 即有 $y = a + \delta(x - a) \in B(a, r) \subset Y_{n_0}$, 因 $x = \dfrac{y - a}{\delta} + a = \dfrac{1}{\delta} y + \left(1 - \dfrac{1}{\delta}\right) a \in Y_{n_0}$, 即 $Y_{n_0} = X$. 从而与 X 有穷维矛盾. □

[注记: 由此知 Banach 空间的线性基个数要么有限要么无限不可数.]
Hilbert 空间中线性基和正交规范基的关系:
X 为 Hilbert 空间, 则 X 的正交规范基 S 指 $S^{\perp} = \{0\} \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{Span}\, S} = X$.(用 $(S^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Span}\, S}$ 的性质). X 的线性基 S 指 S 为 X 的极大线性无关组 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Span}\, S = X$.

性质 7.19. *X 为 Hilbert 空间, 则 X 为有限维 $\Longleftrightarrow$ X 的规范正交基即为线性基.*

证明. $(\Longrightarrow)$ 若 X 为有限维, 则 $\mathrm{Span}\, S = X$ 知 $\mathrm{Span}\, S$ 闭, 即 $\mathrm{Span}\, S = \overline{\mathrm{Span}\, S}$, 从而 X 的规范正交基 S 即为线性基.(规范正交基一定线性无关)
$(\Longleftarrow)$ 下证: 若 X 为无穷维空间, 则 X 中任意一组规范正交基 S 均不是线性基, 即任给一组规范正交基 S, $\exists x \in X$ 使得 $x \notin \mathrm{Span}\, S$.
设 $S_0 = \{e_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset$ 规范正交基 S, 因 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} < +\infty$, $\exists x \in X$ 使得 $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} e_n$, 其中 $(x, e_n) = \dfrac{1}{n}$. 若 $x \in \mathrm{Span}\, S$, 不妨设 $\exists e_1, e_2, \cdots, e_m \in S$ 使得 $x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_m e_m$, 从而当 $j \geq m + 1$ 有 $(x, e_j) = 0$, 矛盾于 $(x, e_j) = \dfrac{1}{n}$. □

7.6 Banach 闭图像定理的应用:Hellinger-Toeplitz 定理

定理 7.20. Hellinger – Toeplitz 定理*:* 设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是 Hilbert 空间，而 $A: X \to X$ 是自伴线性算子，它满足

$$(Ax,y)=(x,Ay) \quad \forall x,y \in X$$

则 A 是连续的.

证明. 由 Banach 闭图像定理, 只需证明 A 是闭算子. 设 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, 当 $n\to\infty$ 时, $x_n \to x \in X, Ax_n \to y \in X$. 根据内积的连续性, 对任意的 $z \in X$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$(Ax_n,z)\to(y,z) \quad (Ax_n,z)=(x_n,Az)\to(x,Az)=(Ax,z)$$

因此, $(y,z)=(Ax,z)$ 对所有 $z\in X$ 成立, 有 $y=Ax$, 说明 A 是闭算子. Banach 闭图像定理表明 A 是连续的 (空间 X 是完备的). □

7.7 有界线性算子 (泛函) 的性质

常用: $T:(X,\|\cdot\|_X)\longrightarrow(Y,\|\cdot\|_Y)$ 线性算子

- $T\in\mathscr{L}(X,Y)\Longrightarrow N(T)=\{x\in X \mid Tx=0\}$ 是闭的.
- 若 X 为有限维, 则 T 连续.
- 若 Y 为有穷维赋范空间, T 满射, 则 T 连续 $\Longleftrightarrow N(T)$ 在 X 中闭.

$f:X\to\mathbb{K}$ 为线性泛函:

- $f\in X^* \Longleftrightarrow N(f)$ 在 X 中闭
- 若 f 非 $0, f$ 无界 $\Longleftrightarrow N(f)$ 在 X 中稠密; f 无界 $\Longleftrightarrow \forall a\in X, r>0, f(B(a,r))=\mathbb{K}$.
- 任给一非零线性泛函能将 X 分解, 即只要 $f(x_0)\neq0$, 则 $X=\mathrm{Span}\{x_0\}\oplus N(f)$
- $f\in X^*, f\neq0$, 则 f 为开映射 $(f:X\to\mathbb{R})$

性质 7.21. $T: X \to Y$ 为线性算子, $N(T) = \{x \in X \mid Tx = 0\}$, 则若 $T \in \mathscr{L}(X, Y) \implies N(T)$ 为闭子空间, 但是 $N(T)$ 为 X 的闭子空间未必有 $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.

证明. $N(T)$ 为 X 的子空间, 下证 $N(T)$ 闭. 取 $\{x_n\} \subset N(T)$, 如果 $\{x_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x_0$, 则 $Tx_n \to Tx_0 \implies Tx_0 = 0$, 即 $x_0 \in N(T)$. 故 $N(T)$ 为 X 的闭子空间.

反例: 取 $X = \ell^1 = \left\{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty\right\}, \|x\| = \sup_{i \geq 1} |\xi_i|$, 取 $\alpha = (1, -1, 0, 0, \cdots) \in X$, 取一线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}, x \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} \xi_i$, 显然 $\|\alpha\| = 1, f(\alpha) = 0$. 定义算子 $T: X \to X, x \mapsto x - \alpha f(x)$, 显然 $N(T) = \{0\}$, 从而 $N(T)$ 为闭子空间. 下面证明 T 无界, 先证线性泛函 f 无界. 令

$$e_k := (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots), x_n := \sum_{k=1}^{n} e_k \in X$$

则有 $\|x_n\| = 1, f(x_n) = n$, 由此可见 $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \infty$, 即 f 无界得证. 再证 T 无界. 用反证法, 如果 T 有界, 即存在 $M > 0$ 使得 $\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$, 那么对 $x \in X$, $\|\alpha\| |f(x)| \leq (1 + M)\|x\|$, 即 $|f(x)| \leq (1 + M)\|x\|$, 从而 f 有界, 矛盾. □

性质 7.22. $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ 为线性算子, 若 X 为有限维空间, 则 $T: X \to Y$ 一定连续.

证明. X 为有限维, 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 X 的一组基, 则 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$, 在 X 中赋予另一范数 $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, 由于有限维赋范空间任意两范数等价, 则 $\exists c > 0$ 使得 $\|x\|_\infty \leq c\|x\|$. 现

$$\|Tx\|_Y = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i Te_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|Te_i\|_Y \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|_Y \leq c \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|_Y \|x\|$$

这说明 T 是有界的. □

性质 7.23. 若 X,Y 为赋范空间, Y 为有限维空间, $T: X \to Y$ 为满射, 线性映射, 则 T 连续 $\Longleftrightarrow N(T)$ 在 X 中闭.

证明. $(\Longrightarrow)$ T 连续, 则 $N(T)$ 闭前面已证.
$(\Longleftarrow)$ 由 $N(T)$ 在 X 中闭, 可定义商空间 $X/N(T)$, 定义映射: $\widetilde{T}: X/N(T) \to Y, [x] \mapsto \widetilde{T}[x] = Tx, \forall x \in [x]$.
1. $\widetilde{T}$ 定义良好, 即 $\widetilde{T}[x]$ 与代表元选取无关. 取 $y,z \in [x]$, 则 $y - z \in N(T) \Longrightarrow Ty = Tz$, 故 $\widetilde{T}$ 良定.
2. $\widetilde{T}$ 为单射. 如果 $\widetilde{T}[x] = Tx = 0 \Longrightarrow x \in N(T) \Longrightarrow [x] = [0]$
3. $\widetilde{T}$ 为满射. 任取 $y \in Y$, 由 T 为满射, $\exists x \in X$ 使得 $y = Tx$, 则取 x 所在等价类 $[x]$, 有 $\widetilde{T}[x] = Tx = y$.
4. $\widetilde{T}$ 连续. 事实上, $X/N(T)$ 与 Y 线性同构, 由 Y 有限维知 $X/N(T)$ 为有限维空间, 而有限维空间出发的线性映射一定连续. 从而存在 $M > 0$,

$$\|\widetilde{T}[x]\|_Y = \|Tx\|_Y \leq M\|[x]\|_0 \leq M\|x\|, \forall x \in Y$$

因此 T 连续. □

性质 7.24. $f: X \to \mathbb{K}$ 为有界线性泛函, 当且仅当 $N(f)$ 为 X 闭线性子空间.

证明. $(\Longrightarrow)$ $f \in X^*, N(f)$ 闭同有界线性算子.
$(\Longleftarrow)$ 反证, 若 f 无界, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \{x_n\} \subset X$ 有 $|f(x_n)| \geq n\|x_n\|$, 下面构造 $N(f)$ 中的收敛点列, 但是此点列极限不在 $N(f)$ 中, 与 $N(f)$ 闭矛盾. 令 $y_n = \dfrac{x_n}{f(x_n)} - \dfrac{x_1}{f(x_1)}$, 则 $f(y_n) = 0$, 即 $y_n \in N(f)$, 但是

$$\left\| y_n - \left(-\frac{x_1}{f(x_1)}\right) \right\| = \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} \leq \frac{1}{n} \to 0 (n \to \infty)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\dfrac{x_1}{f(x_1)} \notin N(f)$, 与 $N(f)$ 闭矛盾, 故 f 有界. □

性质 7.25. 泛函能导致空间的分解: 若 X 为赋范空间, $f : X \to \mathbb{K}$ 为非零线性泛函 (不要求有界性), 则 $\exists x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 进而 $X = N(f) \oplus \{\alpha x_0\}(\alpha \in \mathbb{K})$.

证明. $f \neq 0, \exists x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 任取 $x \in X$, 定义 $y = x - \dfrac{f(x)}{f(x_0}x_0$, 则 $f(y) = 0$, 即 $y \in N(f)$. 令 $\alpha = \dfrac{f(x)}{f(x_0)}$, 则有 $x = y + \alpha x_0 \in N(f) + \{\alpha x_0\}$, 即 $X = N(f) + \{\alpha x_0\}$, 同时 $\{\alpha x_0\} \cap N(f) = \{0\}$, 故 $X = N(f) \oplus \{\alpha x_0\}$. □

性质 7.26. 若 X 为赋范空间, $f : X \to \mathbb{K}$ 为非零线性泛函, 则 f 无界 $\iff$ $N(f)$ 在 X 中稠密.

证明. $(\Longleftarrow)$ 反证, 若 f 有界, 则 $N(f)$ 闭 $\Longrightarrow N(f) = \overline{N(f)} = X$, 即 f 为零泛函, 矛盾.
$(\Longrightarrow)$ 若 f 无界, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists X$ 中一列点 $\{x_n\}$ 使得 $|f(x_n)| \geq n\|x_n\|(\{x_n\} \not\subset N(f))$. 下面, 任取 $x \in X$, 我们证明: $\exists N(f)$ 点列能逼近 x.
1. 若 $f(x) = 0$, 则 $x \in N(f)$, 取 $N(f)$ 中的常值点列 $\{x, x, \cdots\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x = x$.
2. 若 $f(x) \neq 0$, 则 $\exists \{y_n\} \subset N(f)$, $k_n \in \mathbb{K}$, 使得 $x_n = y_n + k_n x$, 故 $|f(x_n)| = |k_n f(x)| \geq n\|x_n\|$ 解得 $|k_n| \geq \dfrac{n\|x_n\|}{|f(x)|}$, 下面令

$$x_n = k_n\left(\frac{y_n}{k_n}\right) + k_n x = k_n\left(x - \left(-\frac{y_n}{k_n}\right)\right)$$

令 $z_n = -\dfrac{y_n}{k_n}$, 有

$$\|x - z_n\| = \frac{1}{|k_n|}\|x_n\| \leq \frac{|f(x)|}{n\|x_n\|}\|x_n\| \to 0(n \to \infty)$$

这样, 得到 $\{z_n\} \subset N(f)$ 能逼近 x. 综上, $N(f)$ 在 X 中稠密. □

性质 7.27. X 为数域 $\mathbb{K}$ 上赋范空间, f 为 X 上非零线性泛函, 则 f 无界 $\iff \forall a \in X, \forall r > 0$, 有 $f(B(a, r)) = \{f(x) : \|x - a\| < r\} = \mathbb{K}$.

证明. $(\Longrightarrow)$ 若 f 不连续, 考虑 $B(0,1)=U$.
1. $f(U)$ 无界. 反证, 若 $f(U)$ 有界, 则 $\exists M\geq 0$, 任取 $x\in U$, 有 $|f(x)|\leq M$. 取 $r_n\in(0,1)$, $r_n\to 1(n\to\infty)$, 则对 $\forall x\in X, \|x\|\leq 1$, 有 $|r_nf(x)|=|f(r_nx)|\leq M$, 令 $n\to\infty$ 有 $|f(x)|\leq M$, 即 $\|f\|\leq M$, 与 f 无界矛盾.
2. $f(U)=\mathbb{K}$. 由于 $f(0)=0$, 任取 $a\in\mathbb{K}\ \{0\}$, 由 f 无界, $\exists x_0\in U$, 使得 $|f(x_0)|>a$, 现令 $y=\dfrac{ax_0}{f(x_0)}$ 有 $\|y\|<\|x_0\|=1$ 且 $f(y)=a$, 故 $f(U)=\mathbb{K}$. 注意到 $B(a,r)=rB(0,1)+a$, 则 $f(B(a,r))=f(a)+rf(B(0,1))=\mathbb{K}$.
$(\Longleftarrow)$ 注意到 f 把有界集映成了无界集, $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)=+\infty$, 故 f 无界. $\square$