作业1，2021 年3月10日

1. 记 $U_1, \cdots, U_n$ 为在 $(0,1)$ 中均匀分布的独立随机变量。对 $0 < t, x < 1$ 定义

$$I(t,x) = \begin{cases} 1, & x \le t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记 $X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t, U_k)$, $0 \le t \le 1$, 这是 $U_1, \cdots, U_n$ 的经验分布函数。试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数。

2. 设随机变量$X(t)$为平稳过程, 证明自协方差函数$\gamma_X(\tau)$具有如下性质:
(1). $\gamma_X(\tau) = \gamma_X(-\tau)$;
(2). $|\gamma_X(\tau)| \le \gamma_X(0)$;
(3). $\gamma_X(\tau)$为非负定函数(矩阵$(\Gamma = (\gamma(t_i - t_j))$非负定的).

3. 设随机变量序列 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 满足

$$X_n = \sum_{k=0}^{m} (A_k \cos n\omega_k + B_k \sin n\omega_k),$$

其中 $A_1, \cdots, A_m; B_1, \cdots, B_m$ 是均值为 0 且两两不相关的随机变量, 又 $EA_k^2 = EB_k^2 = \sigma_k^2$, $1 \le k \le m$, $0 < \omega_k < 2\pi$，试考察其平稳性。

4. 令 Z_1, Z_2 为独立的正态分布随机变量，均值为 0, 方差为 σ^2, λ 为实数。定义过程 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$。试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数, 试验证它是 严平稳过程.

5. 若$X(t)$为

$$X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t,$$

(1)$X(t)$是严平稳的充分必要条件Z_1, Z_2的联合分布$f(z_1, z_2)$为圆形对称分布,即

$$f(z_1, z_2) = g\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right)$$

(2)若$X(t)$是严平稳的, 且Z_1与Z_2独立, 则Z_1与Z_2一定是正态分布.

6. 设$X(t)$是严平稳列, 多元函数$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_m$, 证明

$$Y_t = \phi(X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots, X_{t+m}), \quad t \in \mathbb{Z}$$

是严平稳序列.

7. （滑动平均序列）设 $\{\varepsilon_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为一列不相关的有相同均值 m 和方差 σ^2 的随机变量。设 $a_1,\cdots,a_k$ 为任意 k 个实数。考虑由下式定义的序列：

$$X_n = a_1\varepsilon_n + a_2\varepsilon_{n-1} + \cdots + a_k\varepsilon_{n-k+1}, \quad n=0,\pm1,\cdots$$

验证X_n是平稳列.

8. （随机电报信号）设信号流 $X=\{X(t), t\geq 0\}$ 为一随机过程, 且对每个 t 有

$$P(X(t)=I) = P(X(t)=-I) = \frac{1}{2},$$

而在 $[t, t+\tau]$ 时间内正负号变化的次数 N 服从速率为 λ 的 Poisson 过程，即

$$P(N(\tau)=k) = e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k/k!, \quad \lambda>0,$$

试讨论信号流的平稳性.