作业8，2021 年5月26日

1. 设信号s是随机变量，均值为0，方程为σ_s^2, 并设观测信号为

$$\eta_i = s + W_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

其中加性噪声W_i 满足$E(W_i) = 0, E\left(W_i^2\right) = \sigma_W^2$, $E(W_iW_j) = E(sW_i) = 0$ 。现利用k 个观测值$\eta_1, \ldots, \eta_k$ 的线性组合来估计s, 设$\hat{s}$ 为最小均方线性估计

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^{k} a_i \eta_i$$

求各a_i 的值，并求在最优线性估值时的最小均方误差。

2. 设$\{X_n\}$ 为实宽平稳随机过程, 已知信息为$\boldsymbol{X_n} = (X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n})^\top$ 需要预测X_t, 令$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, 设最优线性预测为

$$\hat{X}_t = \sum_{k=1}^{n} a_k X_{t-k} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X_n}$$

记一步预测误差为

$$\sigma_n^2 = E[X_t - \hat{X}_t]^2.$$

证明：1) $\sigma_n^2 = det(\Gamma_{n+1})/det(\Gamma_n)$. $det(\cdot)$为矩阵的行列式值, 其中$\Gamma_n = E\boldsymbol{X_n}\boldsymbol{X_n}^\top$.

2). 利用n阶滞后进行的一步预测误差满足

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\det\left(\boldsymbol{\Gamma}_n\right)\right)\right)$$

3. 设随机变量序列$\{X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 满足

$$X(n) = -\textstyle\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \end{pmatrix} X(n-k) + W(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$X(0) = W(0)$$

其中$W(n), n = 0, 1, 2, \cdots$ 是白Gauss 噪声序列，均值为0 , 方差为1.

(1) 证明$W(n)$ 是$X(n)$ 的新息序列。

(2) 证明，如果设$W(-3) = W(-2) = W(-1) = 0$, 那么

$$X(n) = W(n) - 3W(n-1) + 3W(n-2) - W(n-3), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(3) 用$X(1), \cdots, X(10)$ 对$X(12)$ 作最优线性预测，并计算预测误差

4. 考虑如下的时间序列模型MA(2)

$$Y_t = 40 + \epsilon_t - 0.6\epsilon_{t-1} + 0.8\epsilon_{t-2},\ \ \epsilon_t \sim N(0, 20),$$

$\epsilon_t = 2, \epsilon_{t-1} = -4, \epsilon_{t-2} = -6.$

(1) 预测未来2期的值.

(2) 求出未来两期预测值的95%的置信区间.

(3) 求出Y_t的谱密度函数.

5. 设X_t为一ARMA(1,1)序列

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim WN(0,\, \sigma^2).$$

令$Y_t = \frac{1}{2}(X_t + X_{t-1})$,

(1) 基于X_{t-1}, X_t对Y_{t+1}做最佳线性预测, 给出表达式, 并计算均方误差.

(2) 求Y_t的谱密度.