EX 4 简单的答案解析

2021 年 5 月 6 日

1 证明叙述等价

首先，(a) $\Rightarrow$ (b) 和 (c) $\Rightarrow$ (d) 是显然成立的。下面证明其他的：

(b) $\Leftrightarrow$ (d)

在 $t=0$ 处均方连续，$\gamma(t) \to \gamma(0), t \to 0$ 时，$E\left(\xi_t - \xi_0\right)^2 = 2\gamma(0) - 2\gamma(t)$，反之也成立。

(a) $\Rightarrow$ (c)

$\gamma(t) - \gamma(s) = E\xi_0\xi_t - E\xi_0\xi_s = E\xi_0(\xi_t - \xi_s) \leqslant \sqrt{\gamma(0)E(\xi_t - \xi_s)^2}$.

(a) $\Leftrightarrow$ (d)

$$\begin{aligned} E\left(\xi_t - \xi_s\right)^2 &= E\left(\xi_t^2 + \xi_s^2 - 2\xi_t\xi_s\right) \\ &= 2\gamma(0) - 2\gamma(t-s) \end{aligned}$$

如果 $\gamma(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续，则 $\forall s \in \mathbb{R}$, $t \to s$ 时，$E\left(\xi_t - \xi_s\right)^2 \to 0$, 因此是均方连续的。反之亦然。

2 证明是线性平稳过程

不妨先假设 $m > n$, 当 $m, n \to \infty$ 则有

$$\begin{aligned} \|Y_{t,m} - Y_{t,n}\|_2^2 = \| \sum_{n<j\leq m} h_j - X_{t-j}\|_2^2 &= \sum_{n<i,j\leq m} h_i h_j < X_{t-i}, X_{t-j} > \\ &= \sum_{n<i,j\leq m} h_i h_j \gamma(i-j) \leq \gamma(0) \sum_{n<i\leq m} |h_i|^2 \to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EY_t = \lim_{n\to\infty} EY_{t,n} &= \lim_{n\to\infty} E \sum_{j=-n}^{n} h_j X_{t-j} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} h_j EX_{t-j} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j EX_{t-j} = EX_t \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y_t Y_{t+h}) &= \lim_{n\to\infty} < \sum_{j=-n}^{n} h_j X_{t-j}, \sum_{j=-n}^{n} h_j X_{t+h-j} > \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=-n}^{n} h_i h_j < X_{t-j}, X_{t+h-j} > \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=-n}^{n} h_i h_j \gamma(h) = \gamma(h) \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j \end{aligned}$$

因为 X_t 是平稳的，故而 $E(Y_tY_{t+h})$ 只依赖于 h，因此 Y_t 是平稳的。

3 均方收敛

不妨先假设 $m > n$, 当 $m, n \to \infty$ 则有

$$\|Y_m - Y_n\|_2^2 = \| \sum_{k=n+1}^{m} a_k X_k \|_2^2 = \sum_{k,l=n+1}^{m} a_k a_l < X_k, X_l >$$
$$= \sum_{k,l=n+1}^{m} a_k a_l \gamma(k-l) \to 0$$

因此 Y_n 是均方收敛的。

4 证明是平稳过程

不妨先假设 $m > n$, 当 $m, n \to \infty$ 则有

$$\|X_{t,m} - X_{t,n}\|_2^2 = \| \sum_{j=n+1}^{m} (A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)) \|_2^2$$
$$= \sum_{j=n+1}^{m} \| (A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)) \|_2^2 \to 0$$

因此 X_n 是均方收敛的。

$EX_t = \sum_{j=1}^{\infty} (EA_j \cos(\omega_j t) + EB_j \sin(\omega_j t)) = 0$ 而且有

$$\begin{aligned}
E(X_t X_{t+h}) &= E\left(\sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)) \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(\omega_j (t+h)) + B_j \sin(\omega_j (t+h)))\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{j=1}^{n} (A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)) \sum_{j=1}^{n} (A_j \cos(\omega_j (t+h)) + B_j \sin(\omega_j (t+h)))\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \omega_j cos(h) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \omega_j cos(h)
\end{aligned}$$

只依赖于 h，因此 X_t 是平稳的。