作业6，2021 年4月15日

1. 若$\{X_t\}$ 为AR(p)模型，$A(L)X_t = \epsilon_t$, 满足

$$A(z) = 1 - a_1 z - \cdots - a_p z^p \neq 0, |z| \leq 1,$$

若$A(z) = 0$的所有解z_j都互异, 存在非零常数$c_1, \ldots, c_p$, 使得

$$\begin{aligned} A(z)^{-1} &= \frac{1}{(1 - z/z_1)(1 - z/z_2)\cdots(1 - z/z_p)} \\ &= \frac{c_1}{1 - z/z_1} + \frac{c_2}{1 - z/z_1} + \cdots + \frac{c_p}{1 - z/z_p} \end{aligned}$$

求解如上的c_j.

2. $\{X_t\}$ 与$\{Y_t\}$是相互正交的因果AR(p)模型，求

$$Z_t = X_t + Y_t$$

是因果AR(p)模型的充分条件。

3. 对AR（2）模型

$$X_t = -0.1X_{t-1} + 0.72X_{t-2} + \epsilon, \epsilon \sim WN(0, \sigma^2)$$

计算自相关系数$\rho_k, k = 1, 2, 3, 4, 5.$

4. γ_k是因果AR(p)序列X_t的协方差函数，$f(\lambda)$是X_t的谱密度，求

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j X_{t-j}$$

的谱密度，证明Y_t也是一个AR序列.

5. 设$\{X_t, t = 0, \pm 1, \ldots\}$ 是下面非因果AR(1) 序列的平稳解：

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right), \quad |\phi| > 1$$

试证明选择合适的白噪声序列Z_t, 使得$\{X_t\}$ 满足如下的因果AR(1) 方程

$$X_t = \phi^{-1} X_{t-1} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}\left(0, \tilde{\sigma}^2\right).$$

确定$\tilde{\sigma}^2$.