EX 1 简单的答案解析

2021 年 4 月 28 日

1 计算均值和协方差函数

直接按照概率论里面的期望公式和协方差计算公式，直接计算就可以。

$$\mathrm{E}[X(t)] = t$$

$$R_X(t,s) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[I(U_1 \le t_1)\sum_{k=1}^{n} I(U_k \le t_2)] = \frac{\min(t_1,t_2) - t_1 t_2}{n}$$

2 性质证明

根据自协方差函数的定义来证明就可以。（好像讲义上有这三个性质）

（1）和（2）是很简单的结论，证明非负定函数就是证明协方差矩阵是正定的。即证明 $\forall$ 非零向量 x，有 $x^T\Sigma x \ge 0$

$$x^T\Sigma x = x^T\mathbb{E}[(X-u)(X-u)^T]x = \mathbb{E}[((X-u)^T x)^T((X-u)^T x)] \ge 0$$

注意 x 是一个实值向量，X 表示一个随机向量。

3 考察平稳性

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X_t X_s\right] &= \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{m}\left(A_k \cos t\omega_k + B_k \sin t\omega_k\right)\sum_{l=0}^{m}\left(A_l \cos s\omega_l + B_l \sin s\omega_l\right)] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sigma_k^2(\cos t\omega_k \cos s\omega_k + \sin t\omega_k \sin s\omega_k) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sigma_k^2 \cos\left((t-s)\omega_k\right)
\end{aligned}$$

注意，在这个的计算过程中当且仅当 $l = k$ 时，求和当中的小项是非零的。所以得到平稳性结论，宽平稳。

4 验证是严平稳过程

独立的正态分布的线性组合仍是正态分布。计算过程和第 3 题的过程是类似的。

$$\mathrm{E}[X(t)] = 0$$

$$R_X(t,s) = \sigma^2 \cos(\lambda(t-s))$$

得到宽平稳的结论。然后正态平稳列即是宽平稳也是严平稳的，所以过渡到严平稳。

5 证明过程如下：

（1）首先我们知道 $\forall m \in \mathbb{R}$，记 $\mathbf{X}_1 = (X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ 和 $\mathbf{X}_2 = (X(t_1+m), X(t_2+m), \cdots, X(t_n+m))$

可以计算 $\mathbf{X}_1$ 的特征函数为

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int\int e^{iAz_1+iBz_2} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

where $A = \sum_{k=1}^n x_k \cos \lambda t_k$ and $B = \sum_{k=1}^n x_k \sin \lambda t_k$.

$\mathbf{X}_2$ 的特征函数为

$$\phi'(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int\int e^{iA'z_1+iB'z_2} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

where $A' = \sum_{k=1}^n x_k \cos(\lambda(t_k+m))$ and $B' = \sum_{k=1}^n x_k \sin(\lambda(t_k+m))$.

注意，这里有

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m & -\sin m \\ \sin m & \cos m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

所以在 $\phi'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中可以作变换

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m & -\sin m \\ \sin m & \cos m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}$$

则有 $A'z_1 + B'z_2 = Az_1' + Bz_2'$，

推出

$$\phi'(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int\int e^{iAz_1'+iBz_2'} f(z_1' \cos m - z_2' \sin m, z_1' \sin m + z_2' \cos m) dz_1' dz_2'$$

则 $X(t)$ 是严平稳的 $\Leftrightarrow \mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 是同分布的

$$\Leftrightarrow \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \phi'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\Leftrightarrow f(z_1, z_2) = f(z_1, z_2) \begin{pmatrix} \cos m & -\sin m \\ \sin m & \cos m \end{pmatrix}$$

所以 $\forall z_0 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \sqrt{{z_1'}^2 + {z_2'}^2}$，总有

$$(z_1', z_2') = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} \cos m & -\sin m \\ \sin m & \cos m \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow f(z_1', z_2') = f(z_1, z_2) \Leftrightarrow$ 有表示 $f(z_1, z_2) = g\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right)$。

（2）$f(z_1, z_2) = g\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right)$ 由独立性与对称性得到 $g\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) = p(z_1) p(z_2)$, 容易验证 p 是一个偶函数。

而且有 $p(0)p(z_2) = g(|z_2|) \Rightarrow p(0)p(z) = g(|z|)$

可以得到 $p(z_1) p(z_2) = g\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) = p\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) p(0)$

取 $z_1 = z_2 = z$，加上有 $\int p(z) dz = 1$，解常微分方程可以得到

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2}$$

因此 z_1, z_2 是正态分布。

6 证明严平稳

其中符号 $\sim$ 表示同分布，则对于 $\forall k$:

$$
\begin{gathered}
\left(X_{t+1}, \ldots, X_{t+m}\right) \sim \left(X_{t+k+1}, \ldots, X_{t+k+m}\right) \\
\downarrow \\
Y_t = \phi\left(X_{t+1}, \ldots, X_{t+m}\right) \sim \phi\left(X_{t+k+1}, \ldots, X_{t+k+m}\right) = Y_{t+k} \\
\downarrow \\
\left(Y_t, \ldots, Y_{t+n}\right) \sim \left(Y_{t+k}, \ldots, Y_{t+n+k}\right)
\end{gathered}
$$

得到严平稳的结论。

7 证明平稳性

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left[X_n\right] = m \sum_{i=1}^{k} a_i \\
& \mathrm{E}\left[X_n^2\right] = \sum_{i=1}^{k} a_i^2\left(m^2+\sigma^2\right) + 2 \sum_{1 \leq i<j \leq k} m^2 \\
& R_X(t, t+s) = \operatorname{Cov}(X(t), X(t+s))
\end{aligned}
$$

计算上式只需寻找 X_t, X_{t+s} 两者中 ϵ_k 的重叠项, 不妨设 $s \geq 0$, 当 $s \geq k$ 时, 无重叠项, 协方差函数 $R_X(t, t+s)=0$, 否则共有 $k-s$ 个重叠项, 分别为:$\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \cdots, \epsilon_{t+s-k+1}$, 此时上式为:

$$
\sum_{i=1}^{k-s} a_i a_{s+i} \sigma^2
$$

只与 s 有关，所以是平稳的。

8 证明平稳性

首先，显然有 $\mathrm{E}[X(t)]=0, \mathrm{E}\left[X(t)^2\right]=I^2$

然后，不妨假设 $s>0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X(t) X(t+s)] & = [\mathbb{P}(N(s) \text{ is even }) - \mathbb{P}(N(s) \text{ is odd })] I^2 \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-\lambda s}(-\lambda s)^k I^2 \\
& = e^{-2 \lambda s} I^2
\end{aligned}
$$

得到 $X(t)$ 平稳的结论。