作业2，2021 年3月17日

1. 下面列出的哪些函数可以成为平稳序列的自协方差函数？

(1) $f(h)=1+\cos\frac{\pi h}{2}+\cos\frac{\pi h}{4}$ (2) $f(h)=1+\cos\frac{\pi h}{2}-\cos\frac{\pi h}{4}$

(3) $f(h)=\begin{cases}1 & \text{if } h=0,\\ 0.4 & \text{if } h=\pm 1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$ (4) $f(h)=\begin{cases}1 & \text{if } h=0,\\ 0.6 & \text{if } h=\pm 1,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

2. (1) 若果随机变量$Z\sim N(0,1)$, 证明Z^2 矩母函数为$Ee^{tZ^2}=(1-2t)^{-1/2}\quad t<\frac{1}{2}$, 即$Z^2$ 是自由度为1的卡方分布.

(b) 若$Z_1,\ldots,Z_n$独立同分布的$N(0,1)$的随机变量, 证明$Z_1^2+\cdots+Z_n^2$ 矩母函数为$(1-2t)^{-n/2},\quad t<\frac{1}{2}$, 即为自由度为$n$ 卡方分布.

(c) 设$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)'\sim N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ 且Σ 非奇异. 验证$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})$ 服从自由度为n的卡方分布.

3. 设零均值Gauss 分布随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma^2 & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma^2\end{pmatrix}$$

求$E\left(X_1X_2X_3\right), E\left(X_1^2X_2^2X_3^2\right)$ 和$E\left(\left(X_1^2-\sigma^2\right)\left(X_2^2-\sigma^2\right)\left(X_3^2-\sigma^2\right)\right)$. (提示：利用特征函数求导的方法求矩)

4. 设(X_1,X_2) 是统计独立的Gauss 随机变量，均服从$N(0,1)$, 令

$$(Y_1,Y_2)=\begin{cases}\left(X_1,|X_2|\right), & X_1\geqslant 0\\ \left(X_1,-|X_2|\right), & X_1<0\end{cases}$$

证明Y_1 和Y_2 都服从一维Gauss 分布，但是(Y_1,Y_2) 不服从二元联合Gauss 分布

5. 设$\{\varepsilon_t\}$ 为IID $N(0,1)$,

$$X_t=\begin{cases}\varepsilon_t, & \text{if } t \text{ is even}\\ \left(\varepsilon_{t-1}^2-1\right)/\sqrt{2}, & \text{if } t \text{ is odd}\end{cases}$$

a. 验证$\{X_t\}\sim \mathrm{WN}(0,1)$, 但不是iid $(0,1)$ 的白噪声序列.

b. 求n为偶数和奇数时的条件期望$E\left(X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n\right)$, 并比较一下。

6. 设$\{\varepsilon_t\}$ 为IID $N(0,\sigma^2)$, 时间序列$X(t)$由以下定义

$$X_t = X_{t-12} + \varepsilon_t, \quad t \geqslant 1, \quad X_0 = X_1 = \cdots = X_{-11} = 0$$

对$t, s \in \mathbb{N}_+$, 求(X_t, X_s)的联合分布.

7. 设三维Gauss 分布随机向量$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$, 均值为0，协方差阵为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

问$\boldsymbol{X}$ 的三个分量间是否有线性相关性？如果有，求出线性相关的表达式。

8. 设$\{Z_t\}$ 为IID $(0,\sigma^2)$白噪声序列,

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

设随机变量的矩母函数为$E\exp(\lambda Z) = m(\lambda)$.

(a) 求随机向量的联合矩母函数$E\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right)$.

(b) 由(a)推出$\{X_t\}$ 是严平稳序列.