

作业5, 2021 年4月7日

1. 假设平稳序列 $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$, $EX_t = 0$, $\gamma(\cdot)$ 满足绝对可和, 即 $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$, 定义 f ,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-ih\lambda}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

证明协方差函数满足 $\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f(\lambda) d\lambda$.

2. If $0 < a < \pi$, 利用Herglotz定理中的式子

$$\gamma(h) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ihv} dF(v) \quad \text{for all } h = 0, \pm 1, \dots$$

试证明下列函数

$$\gamma(h) = \begin{cases} h^{-1} \sin ah, & h = \pm 1, \pm 2, \dots \\ a, & h = 0 \end{cases}$$

是某均值为零的平稳列 $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ 的协方差函数(即给出它的谱分布), 并求对应的谱密度.

3. 设过程 $\{X_t\}$ 满足

$$X_t = A \cos(\pi t/3) + B \sin(\pi t/3) + Y_t$$

其中

$$Y_t = \varepsilon_t + 2.5\varepsilon_{t-1}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$

A 和 B 为均值和方差为 $(0, v^2)$ 的不相关随机变量且与 $\{\varepsilon_t\}$ 也不相关. 求 $\{X_t\}$ 的协方差函数和谱分布.

4. 若 $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ 是个自回归序列, 下列模型满足 $|a| < 1$, $EX_s \varepsilon_t = 0$, 对所有的 $s < t$,

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

求其相关函数和对应的功率谱密度。