2023 数分 A3 期中考试题答案与答案指引

1. (24 分，每小题 6 分) 讨论级数或无穷乘积的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos n!}{n(n+1)}$　　(3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$　　(4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$

解. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$。通项不趋于 0，故发散；

(2) $\left|(-1)^{n}\frac{\cos n!}{n(n+1)}\right|\leqslant\frac{1}{n(n+1)}$，由比较判别法，后者收敛，故级数绝对收敛，从而收敛；

(3) 当 n 充分大时，$0<\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^{2}}$，后者收敛，由比较判别法，前者收敛；

(4) $a_n=\cos\frac{1}{n}-1\leqslant 0\,(\forall n\in\mathbb{N}^{*})$，从而无穷乘积敛散性等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)$ 敛散性。

又 $\cos\frac{1}{n}-1\sim-\frac{1}{2n^{2}}$，后者收敛，由比较判别法，前者收敛，故无穷乘积收敛。 □

2. (12 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos 2n}{n^{p}}$ 的敛散性和绝对敛散性，其中 $p\in\mathbb{R}$

解. **本题来自课本习题 14.5.2(2)，答案可以参考群里“第二次习题课讲义”。** □

3. (10 分) 计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 5}f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$

解. **本题来自课本习题 15.3.4，只是将积分上限做了改动。**

证明一致收敛：对级数在 $x\in[\ln 2,\ln 5]$ 用 Weierstrass 判别法即可。

计算积分：结果是 $\frac{3}{4}$.

另外 $f(x)$ 的表达式：$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}}$. □

4. (10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解. 计算结果是 2. 最简单的计算方法如下：

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\\
&= 2S_n - S_n\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} + 1 - \frac{n}{2^n}\\
&= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + 1 - \frac{n}{2^n}\\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)
\end{aligned}
$$

故：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

□

5. (20 分)(1) 研究函数列 $\{f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}\}$ 在下列区间的一致收敛性：

$$(a)\ (-1,1) \qquad (b)\ (-\infty,+\infty)$$

(2) 研究函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的收敛性和一致收敛性.

解. **本题第 (1) 问来自课本习题 15.2.1(3)，答案可以参考群里“第三次习题课讲义”第 3,4 页；第 (2) 问来自课本习题 15.2.2(7)，答案可以参考群里“第三次习题课讲义”第 7 页。** □

6. (8 分) 设正数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 是否收敛？

解. 由于 $\{a_n\}$ 正数列单调递减，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \xlongequal{\triangle} d \geqslant 0$。此外还有 $a_n \geqslant d$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)。若 $d=0$，由于 $\{a_n\}$ 单调递减正数列，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 交错级数，由 Leibniz 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，矛盾。因此 $d>0$。最后 $0<\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{(1+d)^n}$，后者收敛，从而前者收敛。 □

7. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有任意阶导数，且 $f(0)=0$. 若存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $f'(x)=f(\alpha x), x\in[0,1]$，则 $f(x)=0$.

解. 首先由 $f'(x)=f(\alpha x)$ ($\forall x\in[0,1]$)，反复求导可得：

$$f''(x)=\alpha f'(\alpha x)=\alpha f(\alpha^2 x) \quad f^{(3)}(x)=\alpha^3 f'(\alpha^2 x)=\alpha^3 f(\alpha^3 x)$$

$$f^{(4)}(x)=\alpha^6 f'(\alpha^3 x)=\alpha^6 f(\alpha^4 x) \quad f^{(5)}(x)=\alpha^{10} f'(\alpha^4 x)=\alpha^{10} f(\alpha^5 x)$$

由递推或数学归纳法都可以证得：

$$f^{(n)}(x)=\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\alpha^n x) \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*, x\in[0,1]) \tag{1}$$

式 (1) 代入 $x=0$ 可得 $f^{(n)}(0)=0$ ($\forall n\in\mathbb{N}^*$)。另一方面，由于 $\alpha\in(0,1)$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，因此 $\exists M\geqslant 0$，使得：

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} M \leqslant M \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*, x\in[0,1])$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有任意阶导数，故有以下展开式 ($\exists \xi\in[0,x]$)：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*, x\in[0,1])$$

故：

$$|f(x)| \leqslant \left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\to 0 \quad (n\to\infty, \forall x\in[0,1])$$

从而 $f(x)=0$ ($\forall x\in[0,1]$). □

8. (8 分) 设对每个 $n\geqslant 1$，函数 $f_n:[0,1]\to[0,1]$ 为单调递增函数，若 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 中收敛于连续函数 $f(x)$，证明 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 中一致收敛于 $f(x)$.

解. 我们将用函数列一致收敛的定义来证明此命题。

首先由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，从而在 $[0,1]$ 一致连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得：

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad (\forall x,y\in[0,1],\ |x-y|<\delta) \tag{2}$$

将 $[0,1]$ 进行分割，得到分割点 $\{x_n\}_{n=0}^N$，其中 N 只与 ε 有关，使得 $x_0=0$，$x_N=1$，$|x_{i+1}-x_i|<\delta\,(\forall\,0\leqslant i\leqslant N)$。由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 逐点收敛于 $f(x)$，故对每个 $x_i\,(0\leqslant i\leqslant N)$，都有 $f_n(x_i)\to f(x_i)\,(n\to\infty)$。又由于 N 有限数只与 ε 有关，因此存在一个充分大的 $N_0=N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，使得：

$$|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon\quad(\forall n>N_0,\,0\leqslant i\leqslant N)\tag{3}$$

由于 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，$f(x_i)\leqslant f(x_{i+1})\,(\forall 0\leqslant i\leqslant N-1)$，故结合式 (2)(3) 可得：

$$\begin{aligned}0\leqslant f_n(x_{i+1})-f_n(x_i)&=|f_n(x_{i+1})-f_n(x_i)|\\&\leqslant|f_n(x_{i+1})-f(x_{i+1})|+|f(x_{i+1})-f(x_i)|+|f(x_i)-f_n(x_i)|\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon\\&=3\varepsilon\quad(\forall n>N_0,\,0\leqslant i\leqslant N-1)\end{aligned}\tag{4}$$

于是对每个 $x\in[0,1]$，我们选取适当的 $0\leqslant i\leqslant N$，使得 $|x-x_i|$ 最小，且 $x_i\leqslant x$，则由于 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，$f(x_i)\leqslant f(x)\leqslant f(x_{i+1})\,(x=1$ 时为 $f(1)=f(x_N))$，故结合式 (2)(3)(4) 可得：

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\\&=f_n(x)-f_n(x_i)+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\\&\leqslant f_n(x_{i+1})-f_n(x_i)+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\quad(x=1\text{时只有后两项})\\&<3\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon\\&=5\varepsilon\quad(\forall n>N_0)\end{aligned}$$

这就是 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于 $f(x)$ 的定义。 □