微信扫一扫进行教学评价

第 12 讲：贝叶斯稳健性分析

张伟平

目录

1.1 简介

- 稳健贝叶斯分析关注于贝叶斯分析结果对输入的敏感性, 包括:
  - 先验分布
  - 似然函数
  - 损失函数
- **研究的必要性**:
  - 先验选择的任意性导致推断和决策受到影响
  - 先验信息部分指定, 专家不能提供精确的先验分布, 导致分析者添加了大量额外信息 (比如先验的函数形式选择), 尽管可能与实际知识不一致
  - 损失函数不合理
  - 关于先验或损失的观点是一组人给出, 而不是一个人

考虑一列标准正态检验假设

$$H_0 : \theta_i = 0 \text{ versus } H_1 : \theta_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots$$

假设 50% 的零假设为真. 对每个假设收集数据和计算 p 值, 从而得到一列 p 值. 考虑一个子集, 例如 $0.04 < p < 0.05$, 则所有 p 值位于该范围的假设, 至少有 24% 的零假设是真的.

↑Example
↓Example

Berger and Sellke (1987) 进行了一个稳健贝叶斯分析, 即假设参数 θ_i 在对立假设下可以取任何可能值, 等价地说, 任何先验分布都是可以的 (即考虑一个先验分布类). 则在 p 值在 0.05 附近的条件下, 他们证明了零假设的后验概率的下界为 24%. 因此, 实际中当 p 值为 0.05 时候, 零假设成立的比例是要远高于 24% 的.

假设 $X \sim Pois(\theta)$, 进一步假设 θ 有先验信息: θ 服从一个连续分布, 中位数为 2, 上 0.25 分位数为 4. i.e. $P^{\pi}(\theta \leq 2) = 0.5 = P^{\pi}(\theta \geq 2)$ 和 $P^{\pi}(\theta \geq 4) = 0.25$ 考虑下面三种先验下的后验均值 (i) $\pi_1 : \theta \sim Exp(a), a = \log(2)/2$; (ii) $\pi_2 : \log(\theta) \sim N\left(\log(2), (\log(2)/z_{25})^2\right)$; 以及 (iii) $\pi_3 : \log(\theta) \sim \text{Cauchy}\ (\log(2), \log(2))$.

↑Example

↓Example

(i) 在 π_1 下, $\theta|x \sim Gamma(a+1, x+1)$, 因此后验均值为 $(a+1)/(x+1)$.

(ii) 在 π_2, 下, 如果记 $\gamma = \log(\theta)$, 和 $\tau = \log(2)/z_{25} = \log(2)/0.675$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
E^{\pi_2}(\theta|x) &= E^{\pi_2}(\exp(\gamma)|x) \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-e^{\gamma}\right) \exp(\gamma(x+1)) \exp\left(-(\gamma - \log(2))^2 / \left(2\tau^2\right)\right) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-e^{\gamma}\right) \exp(\gamma x) \exp\left(-(\gamma - \log(2))^2 / \left(2\tau^2\right)\right) d\gamma}
\end{aligned}
$$

(iii) 在 π_3, 下, 如果记 $\gamma=\log(\theta)$, 我们有

$$E^{\pi_3}(\theta|x)=E^{\pi_3}(\exp(\gamma)|x)$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-e^{\gamma}\right)\exp(\gamma(x+1))\left[1+\left(\frac{\gamma-\log(2)}{\log(2)}\right)^2\right]^{-1}d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-e^{\gamma}\right)\exp(\gamma x)\left[1+\left(\frac{\gamma-\log(2)}{\log(2)}\right)^2\right]^{-1}d\gamma}$$

$\pi\backslash x$	0	1	2	3	4	5	10	15	20	50
π_1	.749	1.485	2.228	2.971	3.713	4.456	8.169	11.882	15.595	37.874
π_2	.950	1.480	2.106	2.806	3.559	4.353	8.660	13.241	17.945	47.017
π_3	.761	1.562	2.094	2.633	3.250	3.980	8.867	14.067	19.178	49.402

可以看出, $x\leq 10$ 时候结果对先验具有稳健性

贝叶斯稳健性

关于模型和先验的敏感性

- $M = \{Q_\theta; \theta \in \Theta\}$, Q_θ 为 $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\mathcal{X})$ 上的概率分布
- 样本 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow$ 似然 $l_x(\theta) \equiv l_x(\theta|x_1, \ldots, x_n)$
- $(\Theta, \mathcal{F})$ 上的先验分布 (对称单峰)$\pi \Rightarrow$ 后验分布 π^*
- 关于 M 或 (和)π 的**不确定性** $\Rightarrow$ 感兴趣量的**变化**:
  - $E_{\pi^*}[h(\theta)] = \frac{\int_\Theta h(\theta)l(\theta)P(d\theta)}{\int_\Theta l(\theta)P(d\theta)}$
  - π^*

稳健贝叶斯研究这些变化.

1.2 先验分布的敏感性

结果对先验分布变化的敏感性:

- 选择一个先验分布类 Γ
- 计算稳健性度量, 例如 range $\delta = \bar{\rho} - \underline{\rho}$, $\bar{\rho} = \sup_{\pi \in \Gamma} E_{\pi^*}[h(\theta)]$ 和 $\underline{\rho} = \inf_{\pi \in \Gamma} E_{\pi^*}[h(\theta)]$
  - δ 小: 稳健
  - δ 大: 可以精细化先验类, $\Gamma_1 \subset \Gamma$ 且 (或) 新数据
  - δ 大: 不能精细化先验类, Γ 和同样数据

[Berger and O'Hagan, 1988] 设 $X \sim N(\theta, 1)$, 先验 $\theta \sim N(0, 2)$, 样本 $x = 1.5$. 因此后验分布为 $\theta|x \sim N(1, 2/3)$. 他们放松先验唯一的假设的做法: 将取值域 $\mathcal{R}$ 划分成区间, 每个区间的概率 p_i 和先验 $N(0, 2)$ 下的概率相同.

↑Example
↓Example

在先验 $N(0, 2)$ 下, 区间 I_i 的概率为

I_i	$(-\infty, -2]$	(-2,-1]	(-1,0]	(0,1]	(1,2]	$(2, \infty)$
p_i	.08	.16	.26	.26	.16	.08

对 quantile 类 Γ_Q,I_i 的后验概率很容易计算

- 他们考察了 Γ_Q quantile class 和 Γ_{QU} unimodal quantile class (具体定义见后)
- $\Gamma_{QU} \subset \Gamma_Q$, 结果对 Γ_{QU} 是稳健的
- 从 Γ_Q 精细化为 Γ_{QU} 后 δ 减少了很多

I_i	p_i^*	Γ_Q	Γ_{QU}	Γ_U	π_{BU}
$(-\infty, -2]$	.0001	(0,001)	(0,0002)	(0, .0002)	(0, .0002)
(-2,-1]	.0070	(.001, .029)	(.006, .011)	(.006, .011)	(.006, .010)
(-1,0]	.1031	(.024, .272)	(.095, .166)	(.095, .166)	(.095, .155)
(0,1]	.3900	(.208, .600)	(.320, .447)	(.322, .447)	(.332, .447)
(1,2]	.3900	(.265, .625)	(.355, .475)	(.357, .473)	(.360, .467)
$(2, \infty)$	.1102	(0, .229)	(0,156)	(0, .156)	(0,154)

先验分布类

指定先验分布类具有想要的特征

- 应该包括尽可能多个合理的先验, 排除不合理的先验
- 容易得出和解释 (e.g. 矩, 分位数, 对称, 单峰)
- 与先验知识兼容 (e.g. quantile class), 不需要难以得到的先验信息
- 容易计算

常用先验分布类

- $\Gamma_P = \{\pi : \pi(\theta;\omega), \omega \in \Omega\}$ (Parametric class)

例如共轭类

$$\Gamma_C = \left\{N\left(\mu, \tau^2\right), \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \tau_1^2 \leq \tau^2 \leq \tau_2^2\right\}$$

其中 μ_1, μ_2, τ_1^2, 和 τ_2^2 为一些指定的常数.

- $\Gamma_Q = \{\pi : \alpha_i \leq P\left(I_i\right) \leq \beta_i, i = 1, \ldots, m\}$ (Quantile class)
- $\Gamma_{QU} = \{\pi \in \Gamma_Q, \text{ unimodal }\}$ (Unimodal quantile class)
- $\Gamma_{GM} = \{\pi : \int h_i(\theta) d\pi(\theta) = 0, i = 1, \ldots, m\}$ (Generalised moments class)

- $\Gamma^{DR} = \{\pi : L(\theta) \leq \alpha\pi(\theta) \leq U(\theta), \alpha > 0\}$ (Density ratio class)
- $\Gamma^{B} = \{\pi : L(\theta) \leq \pi(\theta) \leq U(\theta)\}$ (Density bounded class)
- $\Gamma^{DB} = \{F \text{ c.d.f. } : F_l(\theta) \leq F(\theta) \leq F_u(\theta), \forall\theta\}$ (Distribution bounded class)

容易看出

$$\begin{aligned}\Gamma^{DR} &= \{\pi : L(\theta) \leq \alpha\pi(\theta) \leq U(\theta) \text{ for some } \alpha > 0\} \\ &= \left\{\pi : \frac{L(\theta)}{U(\theta')} \leq \frac{\pi(\theta)}{\pi(\theta')} \leq \frac{U(\theta)}{L(\theta')} \text{ for all } \theta, \theta'\right\}\end{aligned}$$

特别, L, U 均为常数时密度比有界.

Neighborhood classes (处于数学方便性而不是容易得出)

- $\Gamma_{\varepsilon}=\{\pi:\pi=(1-\varepsilon)\pi_{0}+\varepsilon Q, Q \in \mathcal{Q}\}$ (ε-contaminations)

- $\Gamma_{\varepsilon}^{T}=\left\{\pi: \sup_{A \in \mathcal{F}}\left|\pi(A)-\pi_{0}(A)\right| \leq \varepsilon\right\}$ (Total variation)

例如设 $\pi_{0}(E)=\frac{\varepsilon}{10}$, 则不同近邻类下 $\pi(E)$ 在 π_{0} 近邻的 range 为

- Variational distance : $\left|\pi(A)-\pi_{0}(A)\right| \leq \varepsilon, \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \pi(E) \leq 11 \frac{\varepsilon}{10}$

- ε -contaminations (contaminating measures in π): $-\varepsilon \pi_{0}(A) \leq \pi(A)-\pi_{0}(A) \leq \varepsilon \pi_{0}\left(A^{C}\right), \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow(1-\varepsilon) \frac{\varepsilon}{10} \leq \pi(E) \leq (1-\varepsilon) \frac{\varepsilon}{10}+\varepsilon$

集中函数类 (Concentration function class)

[Fortini and Ruggeri, 1994]

- $K_g = \{\pi : \pi(A) \geq g(\pi_0(A))\, \forall A \in \mathcal{F}\}$, g -neighbourhood of a nonatomic π_0
- g 单调非降, 连续凸函数 s.t. $g(0) = 0$ 和 $g(1) \leq 1$
- $\pi \in K_g \Rightarrow g(\pi_0(A)) \leq \pi(A) \leq 1 - g(1 - \pi_0(A))$
- $\exists$ 至少一个 $\pi : g$ 为 π w.r.t. π_0 的集中函数 $\varphi_\pi(x)$
- $K_g = \{\pi : \varphi_\pi(x) \geq g(x), \forall x \in [0,1]\}$
- 集中函数比较两个概率测度, 推广了 Lorenz 曲线比较离散分布和均匀分布

1.3 模型类

有限类 ([Shyamalkumaar, 2000])

- $\mathcal{M} = \{\mathcal{N}(\theta, 1), \mathcal{C}(\theta, 0.675)\}$ (相同中位数和 IQR)
- $\pi_0(\theta) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ baseline prior
  - $\Gamma_{0.1}^{A} = \{\pi : \pi = 0.9\pi_0 + 0.1q, q \text{ 任意}\}$
  - $\Gamma_{0.1}^{SU} = \{\pi : \pi = 0.9\pi_0 + 0.1q, q \text{ 关于 } 0 \text{ 对称单峰}\}$
- 感兴趣的后验分布 $E(\theta|\mathbf{x})$

Data	似然	$\Gamma_{0.1}^{A}$		$\Gamma_{0.1}$	
		$\inf E(\theta\|x)$	$\sup E(\theta\|x)$	$\inf E(\theta\|x)$	$\sup E(\theta\|x)$
$x = 2$	Normal	0.93	1.45	0.97	1.12
	Cauchy	0.86	1.38	0.86	1.02
$x = 4$	Normal	1.85	4.48	1.96	3.34
	Cauchy	0.52	3.30	0.57	1.62
$x = 6$	Normal	2.61	8.48	2.87	5.87
	Cauchy	0.20	5.54	0.33	2.88

参数模型 [Box and Tiao, 1962]

$$\wedge_{BT} = \left\{ f(y|\theta,\sigma,\beta) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left|\frac{y-\theta}{\sigma}\right|^{\frac{2}{1+\beta}}\right\}}{\sigma 2^{(1.5+0.5\beta)}\Gamma(1.5+0.5\beta)} \right\}$$

对任意 $\theta, \sigma > 0, \beta \in (-1, 1]$.

Shyamalkumar (2000) 给出此参数模型类的一个应用

Neighbourhood classes

给定 $0 \leq M(\cdot) \leq U(\cdot)$ 和似然函数 l

- $\Gamma_\epsilon = \{f : f(x|\theta) = (1-\epsilon)f_0(x|\theta) + (1-\epsilon)g(x|\theta), g \in \mathcal{G}\}$ ($\epsilon-$ contaminations)
- $\Gamma_{DR} = \{f : \exists \alpha \text{ s.t. } M(x-\theta_0) \leq \alpha f(x|\theta_0) \leq U(x-\theta_0) \forall x\}$ (density ratio class)
- $\Gamma_L = \{l : U(\theta) \leq l(\theta) \leq M(\theta)\}$ (likelihood neighbourhood)

1.4 损失类

感兴趣后验估计, 后验期望损失的行为.

参数类 $\mathcal{L}_\omega = \{L = L_\omega, \omega \in \Omega\}$ $L(\Delta) = \beta(\exp\{\alpha\Delta\} - \alpha\Delta - 1), \alpha \neq 0, \beta > 0$

- $\Delta_1 = (a - \theta) \Rightarrow L(\Delta_1)$ LINEX (Varian, 1975)
  - $\alpha = 1 \Rightarrow L(\Delta_1)$ asymmetric (overestimation worse than underestimation)
  - $\alpha < 0$
    $\Rightarrow L(\Delta_1) \approx$ exponential for $\Delta_1 < 0$
    $\Rightarrow L(\Delta_1) \approx$ linear for $\Delta_1 > 0$
  - $|\alpha| \approx 0 \Rightarrow L(\Delta_1) \approx \sigma^2\Delta_1^2/2$ (i.e. squared loss)
- $\Delta_2 = (a/\theta - 1)$ [Basu and Ebrahim, 1991]

- $\mathcal{L}_U = \{L : L(\theta, a) = L(|\theta - a|), L(\cdot)$ any nondecreasing function $\}$ (Hwang's universal class)

- $\mathcal{L}_\epsilon = \{L : L(\theta, a) = (1-\epsilon)L_0(\theta, a) + \epsilon M(\theta, a) M \in \mathcal{W}\}$ ($\epsilon -$ contamination class)

- $\mathcal{L}_K = \{L : v_{i-1} \leq L(c) \leq v_i, \forall c \in C_i, i = 1, \ldots, n\}$
  $-(\theta, a) \to c \in \mathcal{C}($ consequence $)$
  $-\{C_1, \ldots, C_n\}$ partition of $\mathcal{C}$
  (Partially known class)

$L, L + k \in \mathcal{L}_U$, 在最小化后验期望损失准则下给出相同的贝叶斯估计, 但是非常不同的后验期望损失 give same Bayesian $\Rightarrow$ 稳健性校正

凸损失混合

- $L_\lambda \in \Psi$, 凸函数类, $\lambda \in \Lambda$
- $G \in \mathcal{P}$, : $(\wedge, \mathcal{A})$ 上的所有概率测度类
- $\Omega = \left\{L : L(\theta, a) = \int_\wedge L_\lambda(\theta, a) dG(\lambda)\right\}$
- a_L 在概率测度 π, 损失 L 下的贝叶斯行动
- $\underline{a} = \inf_{L_\lambda \in \Psi} a_{L_\lambda}, \bar{a} = \sup_{L_\lambda \in \Psi} a_{L_\lambda} \Rightarrow \underline{a} \leq a_L \leq \bar{a}, \forall L \in \Omega$
  - $L_\lambda(\theta, a) = |\theta - a|^\lambda, \lambda \geq 1$
  - $L_\lambda(\theta, a) = e^{\lambda(a-\theta)} - \lambda(a - \theta) - 1, , \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$
  - $L_\lambda(\theta, a) = \chi_{[a-\lambda, a+\lambda]^c}(\theta), \lambda > 0$

例如

- $L_\lambda(\theta,a)=|\theta-a|^\lambda,\lambda\geq 1$

  $-\pi\in\Gamma=\{$所有对称概率测度$w.r.$ t. $\mu\}$

  $-\Rightarrow a_L=\mu,\forall L\in\Omega,\forall\pi\in\Gamma$

- $L_\lambda(\theta,a)=I_{[a-\lambda,a+\lambda]^c}(\theta),\lambda>0$

  $-\Rightarrow EL_\lambda=1-\pi([a-\lambda,a+\lambda])$

  $\Rightarrow a_{L_\lambda}$ 为具有最高概率且长度为 2λ 区间的中点

  $-\pi\sim \mathrm{Beta}(3,2)\Rightarrow \underline{a}=1/2,,\bar{a}=2/3$

损失稳健性

$\rho_L(\pi,x,a) = E^{\pi(\cdot|x)}L(\theta,a) = \int L(\theta,a)\pi(\theta|x)d\theta$ 最小值点记为 a_π^L.

L_1 preferred to L_2(Makov, 1994) if

- $\sup_x \inf_a \rho_{L_1}(\pi,x,a) < \sup_x \inf_a \rho_{L_2}(\pi,x,a)$ (posterior minimax)
- $E_X\rho_{L_1}\left(\pi,x,a_\pi^L\right) < E_X\rho_{L_2}\left(\pi,x,a_\pi^L\right)$ (preposterior)
- $\sup_x \left|\frac{\partial}{\partial x}\rho_{L_1}\left(\pi,x,a_\pi^L\right)\right| < \sup_x \left|\frac{\partial}{\partial x}\rho_{L_2}\left(\pi,x,a_\pi^L\right)\right|$ (influence approach)

1.5 敏感性度量

Global sensitivity

- 先验类具有相同的一些特征 (e.g. 分位数, 矩)
- 没有哪个先验相对于其他先验是具有控制性地位的

度量

- Range: $\delta = \bar{\rho} - \underline{\rho}$, 其中 $\bar{\rho} = \sup_{\pi\in\Gamma} E_\pi[h(\theta)|\mathbf{x}]$, 以及 $\underline{\rho} = \inf_{\pi\in\Gamma} E_\pi \cdot [h(\theta)|\mathbf{x}]$
  容易解释
- Relative sensitivity $\sup_\pi R_\pi$, 其中 $R_\pi = \frac{(\rho_\pi - \rho_0)^2}{V^\pi}$, $\rho_0 = E_{\pi_0}[h(\theta)|\mathbf{x}]$, $\rho_\pi = E_{\pi\cdot}[h(\theta)|\mathbf{x}]$ 和 $V^\pi = Var_\pi \cdot [h(\theta)|\mathbf{x}]$
  刻度不变, 决策理论解释, 渐近行为

设 $X \sim N\left(\theta, \sigma^2\right)$, 其中 σ^2 已知, 感兴趣先验类为

$$\Gamma_{SU}=\{\text{ 所有关于众数}\theta_0\text{对称的单峰分布}\}$$

考察边际分布 $m(\pi)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) \pi(\theta) d\theta$ 的 range.

↑Example
↓Example

注意到任何关于众数 θ_0 对称的单峰分布 π 是关于 θ_0 对称的均匀分布的混合. 因此 Γ_{SU} 的极值点服从 $U(\theta_0-r, \theta_0+r)$. 因此

$$\begin{aligned}
\inf_{\pi \in \Gamma_{SU}} m(\pi) &= \inf_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{\theta_0-r}^{\theta_0+r} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) d\theta \\
&= \inf_{r>0} \frac{1}{2r}\left\{\Phi\left(\frac{\theta_0+r-x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\theta_0-r-x}{\sigma}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{\pi \in \Gamma_{SU}} m(\pi) &= \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{\theta_0-r}^{\theta_0+r} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) d\theta \\
&= \sup_{r>0} \frac{1}{2r}\left\{\Phi\left(\frac{\theta_0+r-x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\theta_0-r-x}{\sigma}\right)\right\}
\end{aligned}$$

假设 $X|\theta \sim N(\theta, \sigma^2)$, 感兴趣假设检验 $H_0 : \theta \le \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$. Γ_{SU} 为之前定义. 考虑零假设后验概率的稳健性.

↑Example

↓Example

因为

$$\begin{aligned} P^{\pi}\left(H_0|x\right) &= P^{\pi}\left(\theta \le \theta_0|x\right) \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I_{(-\infty,\theta_0]}(\theta) f(x|\theta) d\pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta) d\pi(\theta)} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sup_{\pi\in\Gamma_{SU}} P^{\pi}\left(H_0|x\right) &= \sup_{r>0} \frac{\frac{1}{2r}\int_{\theta_0-r}^{\theta_0} \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) d\theta}{\frac{1}{2r}\int_{\theta_0-r}^{\theta_0+r} \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) d\theta} \\ &= \sup_{r>0} \frac{\Phi\left(\frac{\theta_0-x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_0-r-x}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_0+r-x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_0-r-x}{\sigma}\right)} \end{aligned}$$

类似

$$\inf_{\pi \in \Gamma_{SU}} P^{\pi}\left(H_0|x\right) = \inf_{r>0} \frac{\Phi\left(\frac{\theta_0 - x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_0 - r - x}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\theta_0 + r - x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_0 - r - x}{\sigma}\right)}$$

可以看出, 上述界分别为 0.5 和 $\alpha = \Phi((x - \theta_0)/\sigma)$.

Local sensitivity

- Global sensitivity 一般难以计算
- 局部敏感性分析考虑对一个先验做小幅度变化后结果的变化
- 逼近全局敏感度的界

记 $\mathcal{P}$ 为概率空间 $(\Theta, \mathcal{B})$ 上的所有概率测度, π 为先验分布, π^x 为后验分布. 定义距离 $d : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 来量化先验和后验测度的变化. 记 ν_ϵ 为 π 在测度 ν 方向的扰动. 则

$$s(\pi, \nu; x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{d\left(\pi^x, \nu_\epsilon^x\right)}{d\left(\pi, \nu_\epsilon\right)}$$

考虑两种类型的扰动

- 线性扰动 $\nu_\epsilon = (1-\epsilon)\pi + \epsilon\nu$
- 几何扰动 $d\nu_c \propto \left(\frac{d\nu}{d\pi}\right)^\epsilon d\pi$

在先验类 Γ 下的局部敏感性定义为

$$s(\pi,\Gamma;x)=\sup_{\nu\in\Gamma} s(\pi,\nu;x)$$

对距离 d 有多种可能选择

- (i) $d_{TV}(\pi,\nu)=\sup_{A\in\mathcal{B}}|\pi(A)-\nu(A)|$, the total variation distance

此时在线性扰动下 $s(\pi,\nu;x)$ 即为 Fréchet 导数的模. 事实上, 首先定义 Gateaux 导数. 记 $\delta=\pi-\nu, \|\delta\|=d_{TV}(\pi,\nu)$, 定义 $T:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, 其中 $T(\pi)=\pi^x$. T 的 Gateaux 导数为

$$\dot{T}_\pi(\delta)=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{d_{TV}\left(\pi^x,\nu_\epsilon^x\right)}{\epsilon}=\frac{m_\nu(x)}{m_\pi(x)}d_{TV}\left(\pi^x,\nu^x\right)$$

因为

$$\nu_\epsilon^x=(1-\lambda)\pi^x+\lambda\nu^x$$

其中 $\lambda=\lambda(\epsilon)=\epsilon m_\nu(x)/\left\{(1-\epsilon)m_\pi(x)+\epsilon m_\nu(x)\right\}$. 同时, 注意到 $d_{TV}\left(\pi^x,\nu_\epsilon^x\right)=\lambda(\epsilon)d_{TV}\left(\pi^x,\nu^x\right)$. 进而如果似然函数 $f(x|\theta)$ 对 θ 是有界的, 则 $\dot{T}_\pi(\delta)$ 为一个符号测度上的线性映射, 满足

$$T(\pi+\delta)=T(\pi)+\dot{T}_\pi(\delta)+o(\|\delta\|),\ \text{as } \|\delta\|\to 0$$

对所有具有质量 0 的符号测度 δ 一致成立 (see Diaconis and Freedman (1986)). 注意

$$s(\pi,\Gamma;x)=\sup_{\delta=\nu-\pi,\nu\in\Gamma}\frac{\|\dot{T}_\pi\|}{\|\delta\|}$$

- (ii) $d_\phi(\pi,\nu) = \int \phi\left(\frac{d\pi(\theta)}{d\nu(\theta)}\right) d\nu(\theta)$, 其中 ϕ 为光滑凸函数, 在 1 附近具有具有界的一阶和二阶导数, 且满足 $\phi(1)=0$. 此即为 ϕ -divergence measure of distance. 一些常见的 ϕ 函数特例见下表

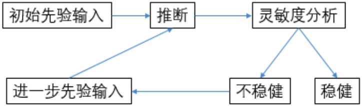
$\phi(x)$	Divergence Measure
$x\log(x)$	Kullback-Leibler
$-\log(x)$	Directed divergence
$(x-1)\log(x)$	J-divergence
$\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2$	Hellinger distance or Kolmogorov's measure of distance
$1-x^\alpha, 0<\alpha<1$	Generalized Bhattacharya measure
$(x-1)^2$	Chi-squared divergence or Kagan's measure of distance
$\frac{(x^\lambda-1)}{\lambda(\lambda+1)}, \lambda\neq 0,-1$	Power-weighted divergence

1.6 总结

需要稳健性

Range δ ” 大” 对 Γ 进行可能的精细化

- 由专家进一步启发先验
  - 使用交互式灵敏度分析工具



  - Ad-hoc tools, e.g. Fréchet 导数来决定分割分位数类的区间
- 需求新数据

Inherently robust procedures

- 稳健先验 (e.g. flat-tailed)
- 稳健模型 (e.g. Box-Tiao class)
- 稳健估计量
- 层次模型
- 贝叶斯非参数

缺乏稳健性

Range δ " 大" 且没有进一步精细化 Γ 的可能

- 选择 Γ 中的一个方便先验, e.g. 对称单峰 quantile class 中的高斯分布
- 根据最优性标准选择一个 $E_{\pi^*}[h(\theta)]$ 的估计
  - Γ-minimax posterior expected loss
  - Γ-minimax posterior regret
- 在值的基础上, 报告 $E_{\pi^*}[h(\theta)]$ 的范围

Γ-MINIMA

$\rho(\pi, a) = E^{\pi^*} L(\theta, a)$ posterior expected loss, minimised by a_π

- $\rho_C = \inf_{a \in \mathcal{A}} \sup_{\pi \in \Gamma} \rho(\pi, a)$ (Posterior Γ -minimax expected loss)

  通过对凸损失交换 inf 和 sup 得到最优行动

- $\rho_R = \inf_{a \in \mathcal{A}} \sup_{\pi \in \Gamma} [\rho(\pi, a) - \rho(\pi, a_\pi)]$ (Posterior Γ -minimax regret)

  最优行动: $a_M = \frac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a})$, 其中有限值 $\underline{a} = \inf_{\pi \in \Gamma} a_{\pi_x}$ 和 $\bar{a} = \sup_{\pi \in \Gamma} a_{\pi_x}$, $\mathcal{A}$ 区间, 以及 $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$

参考文献

[Basu and Ebrahim, 1991] Basu, A.P. and Ebrahimi, N. 1991. Bayesian approach to life testing and reliability estimation using asymmetric loss function. J. Statist. Plann. Inference, 2921–31.

[Berger and O'Hagan, 1988] Berger, J.O. and O'Hagan, A. (1988). Ranges of posterior probabilities for unimodal priors with specified quantiles. In Bayesian Statistics 3 (J.M. Bernardo et al., eds.). Oxford: Oxford University Press.

[Box and Tiao, 1962] G. E. P. BOX, G. C. TIAO; A further look at robustness via Bayes's theorem *, Biometrika, Volume 49, Issue 3-4, 1 January 1962, Pages 419–432

[Fortini and Ruggeri, 1994] Fortini, S. and Ruggeri, F. (1994). Concentration functions and Bayesian robustness (with discussion). Journal of Statistical Planning and Inference, 40, 205–220.

[Shyamalkumaar, 2000] Shyamalkumaar, N.D. (2000). Likelihood robustness. In Robust Bayesian Analysis (D. Rios Insua and F. Ruggeri, eds.). New York: Springer-Verlag