随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2020 年 1 月 6 日）

一、（30 分，每空 2 分）

（1）a.（ 是 ）； b.（ 是 ）； c.（ 是 ）； d.（ 非 ）；e.（ 是 ）。

（2）a.（ 非 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d.（ 非 ）。

（3）（ $1/12$ ），（ $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^k$ ）。

（4）（ $\lambda T/2$ ），（ $\lambda T/3$ ）。

（5）（ $e^{-8} \approx 0.0003$ ），（8 人）。

二、（15 分）

$$EX(t) = EN(t)EY = \lambda t \times 2 = 10t(\text{万元}),$$

$$\begin{aligned} VarX(t) &= EN(t)VarY + VarN(t)(EY)^2 \\ &= 5t \times 4/12 + 5t \times 4 = 65t/3, \end{aligned}$$

$$g_{X(t)}(s) = e^{\lambda t(g_Y(s)-1)} = e^{5t(\frac{e^{3s}-e^{s}-2s}{2s})}\text{。}$$

三、（18 分）

（1）
$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{(2)} = P^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} = \\ &= P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\}P\{X_{n+3} = 3 \mid X_n = 2, X_{n+1} = 1\} \\ &= p_{21}p_{13}^{(2)} = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\text{。} \end{aligned}$$

（2） 求解：
$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}(\pi_2 + \pi_4) \\ \pi_2 = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3) \\ \pi_3 = \frac{1}{2}(\pi_2 + \pi_4) \\ \pi_4 = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_3) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$
，易得： $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 1/4$；

状态分类：不可约、正常返、周期为 2。

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 不存在。例如：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} = \frac{2}{\mu_i} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$，但 $p_{ii}^{(2n-1)} \equiv 0,$（$\forall n \ge 1$），故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 不存在。

四、（12 分）

设 $T = \min\{n : n \ge 0, X_n = 0\}$ ，则：

$p_k = P\{X_T = 0 \mid X_0 = k\},\ v_k = E(T \mid X_0 = k),\ (k = 0,1,2,3)$，其中： $p_0 = 1,\ v_0 = 0$，

由 P 有：

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 \\ p_2 = \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \\ p_3 = p_2 \end{cases}，及 \begin{cases} v_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) \\ v_2 = \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) + \frac{1}{3}(v_3 + 1) \\ v_3 = v_2 + 1 \end{cases}$$

解得：

$p_k = 1,\ (k = 1,2,3)$，及：$v_1 = 7,\ v_2 = 11,\ v_3 = 12$ 。

五、（15 分）

$$EX(t) = EAE\cos(t + \Theta) = 3 \times 0 = 0,$$

（1） $\gamma_X(t+\tau, t) = EX(t+\tau)X(t) = EA^2E\cos(t+\tau+\Theta)\cos(t+\Theta)$，

$$= 18 \times \tfrac{1}{2}\cos\tau = 9\cos\tau$$

故 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳。

（2） $R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 9\pi(\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1))$ 。

六、（10 分）

（1） $S(\omega) = \dfrac{\omega^2 + 3}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 7)} \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21} e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12} e^{-2|\tau|}$；

（2） 该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$ 。

（完）