中国科学技术大学 2018—2019学年第二学期考试试卷

考试科目 **随机过程B** 　　得分 ____________

学生所在系 __________ 姓名 ____________ 学号 ____________

(考试时间: 2019年6月24日下午2:30—4:30, 半开卷)

装……………………订……………………线

一、 (30分) 是非判断与填空题

(1)设X与Y相互独立，分别服从指数分布$Exp\{\lambda\}$与$Exp\{\mu\}$，则：

(a) $X+Y \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. (　) 　(b) $\min\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. (　)

(c) $\max\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. (　) 　(d) $P\{X>h\}=1-\lambda h+o(h),\ h\downarrow 0$. (　)

(e) $P\{X\le s+t \mid X>s\}=P\{X\le t\},\ s,t>0$. (　)

(2) 关于平稳过程，下列说法是否正确

(a) 宽平稳过程具有平稳增量性. (　)

(b) Poisson过程是平稳过程. (　)

(c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. (　)

(d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. (　)

(3) 设有复合泊松过程$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，其中$N(t)$是强度为$\lambda$的泊松过程，$Y_i\sim Exp\{\mu\}$. 则:

$EX(t)=$ ___________，　$E[X^2(t)]=$ ___________，　$g_{X(t)}(s)=E\exp\{sX(t)\}=$ ___________.

(4) 现有对于一个三状态的马氏链$\{X_n, n\geqslant 0\}$的25个连续观察数据:

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1,
-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1,

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵P为_____________________.

二、 (8分)保险公司的理赔次数$N(t)$是强度为λ的泊松过程，诸次理赔额$C_i(i\geqslant 1)$为独立同分布，且与$N(t)$独立，$EC_i=\mu$. 又设W_i 为第i次理赔发生的时间$(i\geqslant 1)$，则到时刻t为止的理赔总额的折现值为：

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中$\alpha>0$为折现率，试求$C(t)$的期望值.

三、 (20分)质点在一正N边形$(N\ge 3)$的周边上作随机游动(顶点$1,2,...,N$按顺时针方向排列)，质点以概率p顺时针游动一格，以概率$q=1-p$ 逆时针游动一格，试用一马氏链$\{X_n, n\geqslant 0\}$描述该模型，并

(1)写出该马氏链的转移概率矩阵P，并作状态分类；

(2)求出该马氏链的平稳分布；

(3)该马氏链是否存在极限分布？为什么？

四、 (20分)设马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)试对该马氏链作状态分类(分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);

(2)试求过程从状态k出发而被状态4吸收的概率$f_{k,4}$及$f_{k,5}$, $(k = 1, 2, 3)$.

五、 (15分)考察下列函数$S_i(\omega), (\omega \in R)$：

$$S_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2}, \qquad S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}, \qquad S_3(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3},$$
$$S_4(\omega) = \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}, \qquad S_5(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2 + 2}(i = \sqrt{-1}), \qquad S_6(\omega) = \frac{4a \cos \omega}{\omega^2 + a^2}(a > 0).$$

(1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数？并进而求出其对应的协方差函数$R(\tau)$.

(2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性？为什么？

六、 (7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b \cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中$U \sim$U$(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, 方差为σ^2的白噪声序列, U与$\{\varepsilon_t\}$独立. 作矩形窗滤波, $M > 0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M + 1} \sum_{j=-M}^{M} X_{t-j}$$

1)试问Y_t是平稳过程吗？为什么？

2)求出Y_t的方差.