中国科学技术大学

2016-2017学年第一学期期末考试试卷 (A卷)

考试科目 随机过程(B) 得分 ____________

学生所在系 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________

(考试时间: 2017年1月11日上午8 : 30-10 : 30, 半开卷)

装 …………………… 订 …………………… 线

一、 (32分) 判断是非与填空题.

(1) 设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程, 则 $\mathrm{Cov}(N(t), N(s))=$ ________.

(2) （判断是非）设有 $m \geq 1$ 使得对于马氏链的所有状态 i，有 $P_{i,j}^{(m)} > 0$，则：

A $d(j)|m$, 其中 $d(j)$ 为 j 的周期; ( )

B $d(j) = m$; ( )

C j 是非周期的; ( )

D j 的周期为无穷; ( )

(3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为λ_1, λ_2, λ_3 的Piosson过程到达，且相互独立。若不论颜色，第一辆汽车平均到达时间为________；第一辆红色汽车的平均到达时间为________。

(4) 设$[0, t]$内到达某商店门口的顾客数$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程, 每个达到的顾客依概率p 进入店内，以概率$1 - p$ 不进店即离开，且顾客是否进店是相互独立的；进店的每个顾客又独立地以概率q 进行消费，以概率$1 - q$不消费。则进店的顾客数的均值和方差为________和________；消费的顾客数的均值和方差为________和________。

(5) 设$X(t) = A\sin(2\pi\Theta_1 t + \Theta_2)$, A 为常数，$\Theta_1$, Θ_2 为相互独立的随机变量，Θ_1的密度函数为一个偶函数，而Θ_2 服从区间$[-\pi, \pi]$上的均匀分布，则其均值函数为________，协方差函数为________，从而该过程为________。

(6) 设马氏链的状态 i 是周期为 d 的常返状态，μ_i 为状态 i 的平均常返时，则$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} =$ ________。

二、 (16分) 设某人甲负责订阅杂志，前来订阅的顾客数是日均到达率为6 的泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$。若每个顾客的订阅季数$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.且各人的选择相互独立。设 $N_i(t)$ 为订阅 i 季杂志的顾客人数，$i = 1, 2, 3$. 并以 $\{X(t)\}$ 表示到时刻 t 为止甲所得全部手续费（假设每订出一季杂志，甲可得手续费 1 元），

(1) 问 $N_i(t)$，$i = 1, 2, 3$ 分别是什么过程？它们是否相互独立？

(2) 试求：$E[X(t)]$，$Var(X(t))$, 及$X(t)$ 的矩母函数$g_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}]$.

三、 (20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时（$n=0$）均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月（单位时间）顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器)如下图所示.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明该链为不可约、遍历的;

(2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少？

(3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例？

四、 (16分) 逐个随机地把球放入到 a个盒子中去（可重复放），以 X_n 表示放了 n个球之后的空盒数，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链，

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵P，并进行状态分类;

(2) 试求放满 a个盒子的平均时间（次数）。

五、 (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2+5}{\omega^4+11\omega^2+24},\ -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

(完)