

中国科学技术大学

2021—2022学年第二学期期末试卷

考试科目 随机过程B 得分

所在系 姓名 学号

考试时间: 2022年6月14日8:30—10:30

一. (30分) 是非填空选择题(答案请写在答题纸上):

1. (10分) 判断下列有关离散时间Markov链说法正确与否.

- 1). Poisson过程是平稳过程也是连续Markov链. ()
- 2). 在直线上简单对称的随机游动所有状态都是零常返的. ()
- 3). 一个有限状态的Markov链一定存在平稳分布. ()
- 4). 若Markov链某个状态是吸收态, 则过程最终会停留在这个吸收态. ()
- 5). Gauss平稳过程一定是严平稳过程. ()

2. (4分) 某加油站红、银、白三种汽车达到过程分别为强度1、3、5 (辆/10分钟) 的Poisson过程, 则第一辆车的到达的平均时间为 , 第一辆白车到达前恰好有 k 辆非白车到达的概率为 ($k \geq 0$).

3. (4分) 下列可以成为某平稳过程的谱密度函数是 .

- A. $S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$ B. $S(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3}$
C. $S(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2} (i = \sqrt{-1})$ D. $S(\omega) = \frac{\cos \omega}{\omega^2+2}$

4. (4分) 已知实平稳过程 $\{X(t)\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 25 + 4/(1 + 6\tau^2)$, 并且满足 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $X(t)$ 与 $X(t + \tau)$ 独立, 则 $\{X(t)\}$ 的均值为 , 方差为 .

5. (4分) 下列说法正确的是 .

- A. 平稳独立增量过程一定是平稳过程.
- B. 只要存在正常返类, 离散时间的Markov链一定存在平稳分布.
- C. 极限分布和平稳分布均存在则一定相同.
- D. 有限状态的Markov链一定是遍历的Markov链.

6. (4分) 若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一平稳独立增量过程, 则

- A. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是Poisson过程 B. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是Markov过程
C. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳过程 D. $\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程

二. (15分) 设某个服务系统只有一个服务器, 从早上8:00开始接受服务, 此时已有无数顾客在进行排队. 每次只能服务一个顾客, 服务的平均时间为20分钟, 且每次服务的时

间为独立同分布的指数分布, $N(t)$ 表示从8:00后 t 时间内服务的顾客数。求

(1)上午8:00到12:00的平均服务顾客数,

(2) 这段时间内服务完的顾客停留的平均时间.

- 三. (15分) 市场上三种品牌的牛奶(1,2,3) 在某一地区的市场占有率开始时均为 $1/3$, 而每过一个季度后顾客的消费倾向发生改变, 我们用一个三状态的Markov链来描述, 其一步转移概率均值为

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1)半年之后三种牛奶的市场占有率为多少?

(2)从状态2到状态3的平均首达时间是多少?

(3) 各品牌牛奶市场占有率最终会稳定于什么样的比例?

- 四. (15分) 从数 $1, 2, \dots, N$ 任取一个数作为 X_1 , 对 $n > 1$, 从 $1, 2, \dots, X_{n-1}$ 中任取一个数作为 X_n , 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一Markov链.

(1)写出 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵 P .

(2) 对该Markov链进行状态分类(几个等价类, 周期性, 是否常返, 正常返等).

(3)极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$ 是否存在? 为什么.

- 五. (10分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 6}{\omega^4 + 8\omega^2 + 15}, -\infty < \omega < \infty,$$

求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

- 六. (15分) 设 $X(t) = A \sin(t + \Phi), -\infty < t < +\infty$, 其中 A 与 Φ 是相互独立的随机变量, 且 $P(\Phi = \pi/4) = 1/2, P(\Phi = -\pi/4) = 1/2, A$ 服从区间 $(-1, 1)$ 内的均匀分布, 讨论

(1) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的平稳性.

(2) $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值遍历性.