中 国 科 学 技 术 大 学

2021—2022学年秋季学期期末试卷

考试科目＿＿＿＿随机过程＿＿＿＿　　得分＿＿＿＿＿＿

所在系＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿＿

装 …… 订 …… 线

一、 判断题与填空题(30分)

1. (4 分) $\{X_n\}$ 是 Markov 链，i 是常返态，且 $i \leftrightarrow j$，则 j 为常返态. (　　)

2. (4 分) 宽平稳过程不一定是严平稳过程，严平稳过程一定是宽平稳过程. (　　)

3. (8 分) 齐次 Poisson 过程和非齐次 Poisson 过程是否都具有如下性质：独立增量性质(　　)，平稳增量性质(　　)；

4. (5 分) 设随机变量X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，则 X 的矩母函数$g(t)$ 为＿＿＿＿；

5. 设在时间间隔 $(0,t]$ 内到达某商场的顾客数服从强度为 $\lambda > 0$ 的齐次 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$，则 (1) (5 分) $\mathbf{P}(N(1) = 1|N(4) = 2) =$ ＿＿＿＿；(2) (4 分) $\mathbf{P}(W(1) > 1, W(2) \leq 2) =$ ＿＿＿＿，这里 $W(i)$ 表示第 i 位顾客的来到时刻.

二、 (15分) 设随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Possion 过程，随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 定义为：

$$\begin{cases} X(t) = 1, & N(t) \text{ 取偶数;} \\ X(t) = -1, & N(t) \text{ 取奇数.} \end{cases}$$

(1) 求 $X(t)$ 的分布；

(2) 讨论过程$\{X(t), t \geq 0\}$ 的平稳性；

(3) $\{X(t), t \geq 0\}$ 是否具有均值遍历性.

三、 (15分) 载重轮船可经由 A 和 B 两条水路通过闸门，设 t 小时内由 A 水路通过闸门的轮船数服从强度为 3 的齐次 Poisson 过程 $\{N_1(t), t \geq 0\}$, 由 B 水路通过闸门的轮船数服从强度为 5 的齐次 Poisson 过程 $\{N_2(t), t \geq 0\}$, 两过程相互独立. 假设轮船的载重吨位服从 $[500, 1000]$ 上的均匀分布.

(1) 给出 t 小时内经过闸门轮船总数 $N(t)$ 的分布；

(2) 2小时内经过闸门轮船的总载重吨位数为多少？

(3) 求 t 小时内经过闸门轮船的平均总载重吨位数.

四、 (10分) 假设今天是否下雨依赖于前两天的天气条件. 特别地，假设如果过去的两天都下雨，那么明天下雨的概率为 0.7; 如果今天下雨，但昨天没有下雨，那么明天下雨的概率为 0.5; 如果昨天下雨，但今天没有下雨，那么明天下雨的概率为 0.4; 如果过去的两天都没有下雨，那么明天下雨的概率为 0.2.

(1) 建立一个四状态的离散时间 Markov 链描述上述现象，并写出转移概率矩阵；

(2) 已知星期一与星期二下雨，问星期四下雨的概率是多少？

五、 (20分) 考虑状态空间为 $\mathcal{S} = \{0,1,2,3\}$ 且具有如下转移概率矩阵的 Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(1) 对状态空间进行分类, 并指出每个状态的周期性、常返和瞬过性；

(2) 求该 Markov 链的平稳分布 $\{\pi_i, i = 0,1,2,3\}$；

(3) 若X_0 具有如上 **(2)** 中的平稳分布，证明 X_n 也具有同样的分布；

(4) 若X_0 具有如上 **(2)** 中的平稳分布，求 $\mathbf{P}(X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 1)$；

六、 (10分) 已知平稳过程 $\{X(t)\}$ 的协方差函数为

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1; \\ 0, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

求 $\{X(t)\}$ 的谱密度函数.