中 国 科 学 技 术 大 学

2020—2021学年第二学期期末试卷

考试科目 随机过程B　　得分 ____________

所在系 ________　姓名 ____________　学号 ____________

考试时间: 2021年7月5日8:30—10:30

装……………………订……………………线

一. (30分) 是非填空选择题(答案请写在答题纸上):

1. (10分) 判断下列有关离散时间Markov链说法正确与否.

1). 具有平稳增量的随机序列是Markov链. (　　)

2). 若两个状态不互达，则它们有可能都是常返的. (　　)

3). 若有无穷个状态且不可约，则所有状态不可能都是常返的. (　　)

4). 若某个状态是常返的，则过程至少会到达它一次. (　　)

5). Markov链中，周期为无穷大的状态一定是非常返的.(　　)

2. (3分) 设$\{N_t, t \geq 0\}$ 是强度为λ的Poisson过程, 非负随机变量T与$N(t)$独立且$P(T > t) = \exp\{-\mu t\}, \mu, t > 0$, 则对$k \geq 0$, $P(N(T) = k) =$______________.

3. (3分) 下列说法不正确的是______________.

A. Poisson过程是Markov过程　　B. 从常返态出发只能到达常返态

C. Poisson过程是平稳过程　　D. 有限状态的MC一定存在正常返态.

4. (4分) 设更新过程$\{N(t)\}$的第n个更新间隔$X_n \sim \exp(\mu)(n \geq 1, \mu > 0)$, 即$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$, 此处$S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, 则$S_n$的分布密度函数为$f_{S_n}(x) =$ ______________, 概率$P(N(t) = n) =$______________$(n \geq 0)$.

5. (3分) 下列说法正确的是______________.

A. $\{N(t)\}$与$\{M(t)\}$ 是Poisson过程, 则$N(t) + M(t)$也是Poisson过程.

B. 若到达的车辆数服从Poisson过程, 每间隔一辆车记录一下, 则被记录下的车辆数也服从Poisson过程.

C. $R(\tau) = |\tau| e^{-\tau^2/2}$有可能成为某个平稳过程（或序列）的协方差函数.

D. 初始分布为平稳分布的Markov链为严平稳过程.

6. (3分) 设 $\{X(t)\}$ 为 Gauss 平稳过程, 均值为零, 功率谱密度 $S(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$。则 $X(t)$ 落在区间 $[0.5, 1]$ 中的概率为______________.

7. (4分) 某种粒子按强度为λ 的泊松过程来到一个计数器，每个到达的粒子都使计数器关闭一段时间r. 当一个粒子到达时，若计数器未处于关闭状态，它就被记录下来。则在时间区间$(t, t+r]$ 中记录到一个粒子的概率为__________$(t \geq r)$.

二. (12分) 某网站负责某项职业考试的网上报名工作，该项考试共有A、B、C三门课程，考生中报考这三门课程的考生所占的比例分别为35%、40% 和25%, 而三门考试的报名费分别为30元、30元和50元. 设考生按速率为λ的泊松过程到该网站报名，其中$\lambda = 10$人/天, 若以$X(t)$ 表示到第t 天为止该网站收到的报名费总额，试求$X(t)$ 的期望$EX(t)$ 、方差$Var(X(t))$ 和矩母函数$g_{X(t)}(\mu) = Ee^{\mu X(t)}$。

三. (15分) 市场上有a 种牌号的牙膏，记为$\{1, 2, \ldots, a\}$. 假定消费者相继使用的牙膏牌号构成马氏链，选用第i 种牌号牙膏的消费者继续使用第i 种牌号牙膏的概率为$p_{i,i}, (0 < p_{i,i} < 1, i = 1, 2, \ldots, a)$. 若他对原来使用的牙膏不满意, 就在其它$a-1$ 种牙膏中任选一种, 即有: $p_{i,j} = \frac{1-p_{i,i}}{a-1}, (j \neq i)$,

(1) 试写出该马氏链的转移概率矩阵P 并对马氏链作状态分类;

(2) 试求长时间后第i 种牌号牙膏的市场占有率$\pi_i, (i = 1, 2, \ldots, a)$.

四. (15分)设一质点在正整数点上做随机游动, 质点处于正整数点i时，以概率p_i往右走一格，概率$1-p_i$退回到点1, $p_i = e^{-\frac{1}{i}}$, $i = 1, 2, \ldots$. 记X_n表示时刻n质点所处的位置,

(1) 写出过程的状态空间, 说明该过程为Markov链.

(2) 讨论该各状态的周期性和常返性。

五. (16分)设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为0的平稳过程，令$Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中ω_0 是实常数, $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, 且$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 与Θ 相互独立, $R_X(\tau)$ 和$S_X(\omega)$ 分别是$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的协方差函数和功率谱密度. 试证:

(1) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是平稳过程，且协方差函数

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

(2) $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{4}\left[S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0)\right].$$

六. (12分) 已知平稳过程$\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 7\omega^2 + 12}, -\infty < \omega < \infty$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数$R(\tau)$;

(2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?