随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2016 年 6 月 24 日考试）

一、（20 分）判断是非与填空：

（1）：非，是，非； (3 分)

（2）：是，是，非；(3 分)

（3）：非，是，非；(3 分)

（4）是，非，非，非；(4 分)

（5）： $p_{2,1}p_{1,3}^{(2)}=5/27$；(4 分)

（6）： $\lambda_i/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$。(3 分)

二、（16 分）：

（1）(5 分) $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 分别是强度为 $\lambda p_3, \lambda p_2, \lambda p_3$ 的泊松过程，其中：

$$\lambda=100,\ p_1=0.2,\ p_2=0.3,\ p_3=0.5,$$

即强度分别为：$20, 30, 50$。

（2）(6 分) $P\left\{N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3\right\}=$

$$=P\left\{N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3 \mid N(t)=n\right\}P\left\{N(t)=n\right\} \quad （其中 n=n_1+n_2+n_3）$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\frac{(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!}e^{-\lambda p_1 t}\frac{(\lambda p_2 t)^{n_2}}{n_2!}e^{-\lambda p_2 t}\frac{(\lambda p_3 t)^{n_3}}{n_3!}$$

$$=P\left\{N_1(t)=n_1\right\}P\left\{N_2(t)=n_2\right\}P\left\{N_3(t)=n_3\right\}。$$

（3） (5 分) $X(t)=80N_1(t)+50N_2(t)+30N_3(t)$，

$$EX(t)=4600t，\quad Var(X(t))=248000t。$$

三、（16 分）：

（1）(5 分){1}与{2}均为瞬过类，前者为非周期，后者周期为无穷；{3,4,5,6}与{7,8}均为遍历类；

（2）(6 分) $f_{1,3}^{(1)}=0$，$f_{1,3}^{(n)}=(0.5)^n$，$(n\ge 2)$；

（3）(5 分) 该马氏链的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}\begin{pmatrix}0.5&0.5&0&0&0&0&0&0\\0&0&0.5&0&0&0&0.5&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0.5&0&0.5&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0.5&0&0&0.5&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0.75&0.25\end{pmatrix}$$

设 $T=\min\{n:\ n\ge 0, X_n=5\}$，记 $v_i=E(T\mid X_0=i)$，$(i=1,2,\cdots,8)$ 则有：

$$v_6=E(T\mid X_0=6)=\sum_i E(T\mid X_1=i)p_{6,i}=0.5E(T\mid X_1=3)+0.5E(T\mid X_1=6)$$

$=0.5(v_3+1)+0.5(v_6+1)$，即有：$v_6=0.5(v_3+1)+0.5(v_6+1)$；同理可得：

$v_3=v_4+1$，$v_4=0.5(v_3+1)+0.5$。解得：$v_6=6$。

四、（16 分）：

（1） (5 分) $$P=\begin{array}{c}-1\\0\\1\end{array}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{3}{9}&\frac{2}{9}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix};$$

（2）(6 分) 由状态转移图分析可证；

（3）(5 分) 求解线性方程组：

$$\pi_{-1}=\tfrac{4}{9}\pi_{-1}+\tfrac{4}{9}\pi_0,\ \pi_0=\tfrac{4}{9}\pi_{-1}+\tfrac{3}{9}\pi_0+\tfrac{1}{3}\pi_1,\ \pi_1=\tfrac{1}{9}\pi_{-1}+\tfrac{2}{9}\pi_0+\tfrac{2}{3}\pi_1,\ \sum_i\pi_i=1$$

得马氏链极限分布：$\pi=(\frac{12}{41},\frac{15}{41},\frac{14}{41})$，所求者为：

$$\mu_1=\tfrac{41}{14}\simeq 2.93,\ \mu_{-1}=\tfrac{41}{12}\simeq 3.42。$$

五、（16 分）：

（1）(8 分) 否则，设 $E[U]\triangleq u$，$E[V]\triangleq v$ 不全为零，则 $u^2+v^2>0$，从而有：

$$\frac{EX(t)}{\sqrt{u^2+v^2}}=\sin(\omega t+\alpha)\ (t\in\mathrm{R})$$ 不为常数，（ 其中 α 满足：$\sin\alpha=u\big/\sqrt{u^2+v^2}$，

$\cos\alpha=v\big/\sqrt{u^2+v^2}$ ）矛盾。

（2）(8 分) 充分性易证，此时 $EX(t)=0,\ (\forall t\in\mathrm{R})$ 又若记 $E[U^2]=E[V^2]\triangleq\sigma^2$，则：

$\gamma_X(t+\tau,t)=EX(t+\tau)X(t)=\sigma^2\cos(\omega\tau)=R_X(\tau)$。

必要性：取 $t_0\in\mathrm{R}$ 使得：$\sin(\omega t_0)=0$，则因为 $X(t)$ 的二阶矩有限，故有：

$EX^2(t_0)=\cos^2(\omega t_0)E[U^2]<\infty$，这说明 $E[U^2]<\infty$，同理可证：$E[V^2]<\infty$。

又因 $X(t)$ 为宽平稳，故其方差：$Var(X(t))=$

$=E[U^2]\cos^2(\omega t)+E[UV]\sin(2\omega t)+E[V^2]\sin^2(\omega t)$ 为常数，对它求导,应有：

$$\omega[E(V^2)-E(U^2)]\sin(2\omega t)+2\omega E(UV)\cos(2\omega t)=0,\ (\forall t\in\mathrm{R})$$

显然，与（1）类似，此时必有：$E(UV)=0$，且 $E(U^2)=E(V^2)$。

六、（16 分）：

（1）(8 分) $R(\tau)=\dfrac{3\sqrt{2}}{20}e^{-\sqrt{2}|\tau|}+\dfrac{\sqrt{7}}{35}e^{-\sqrt{7}|\tau|}$；

（2）(8 分) 由于 $\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau<\infty$，故 $X(t)$ 的均值具有遍历性。