中国科学技术大学

2015-2016学年第二学期期末考试试卷 (A卷)

考试科目 随机过程(B) 得分 ________

学生所在系 ________ 学号 ________ 姓名 ________

(考试时间: 2016年6月24日, 可用计算器)

装……订……线

一、 (25分) 判断选择题.

(1) 设$\{N(t), t \ge 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程,

a. $\{N(t), t \ge 0\}$一定是平稳过程; ( )

b. 给定$N(t) = n > 0$, 则第n个事件的到达时间服从区间$[0, t]$上的均匀分布; ( )

c. $\{M(t), t \ge 0\}$是另一个强度为$\gamma > 0$的Poisson过程,则$\{N(t) + M(t), t \ge 0\}$是一个强度为$\lambda + \gamma$的Poisson 过程; ( )

(2) 假设一个马氏链的所有状态都是常返的,i和j是两个状态且$i \to j$,则

a. $j \to i$; ( )

b. $P_{ij} > 0$ 或$P_{ji} > 0$; ( )

c. $\sum_{i=1}^{\infty} P_{jj}^{(i)} < \infty$; ( )

(3) 下列关于τ的函数$R(\tau)$是否可能作为平稳过程或序列的协方差函数

a. $R(\tau) = e^{-|\tau|}(\tau^2 + 2|\tau| - 1)$; ( )

b. $R(\tau) = \begin{cases} 1/|\tau|, & \tau \neq 0 \\ 1, & \tau = 0 \end{cases}$; ( )

c. $R(\tau) = |\tau| e^{-\tau^2/2}$; ( )

(4) 设 $\{X_n, n \in N\}$ 是一个马氏链，状态空间为 $\mathcal{S}$. 下面说法是否正确.

a. $P_{ij}^{(n)} \ge f_{ij}^n$, 其中 $i, j \in \mathcal{S}, n \in N$; ( )

b. 如果状态 i, j 是互达的, 则存在 n 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$, $P_{ji}^{(n)} > 0$; ( )

c. 如果转移矩阵的所有行相同，则所有状态是属于相同的类; ( )

d. 如果 $f_{ij} < 1$, $f_{ji} < 1$, 则 i, j 不是互达的; ( )

(5) 设有四个位置 1, 2, 3, 4 在圆周上逆时针排列，一粒子在这四个位置上随机游动，粒子从任何一个位置，以概率 2/3 逆时针游动到相邻位置，以概率 1/3 顺时针游动到相邻位置，以 $X(n) = j$ 表示时刻 n 处在位置 j $(j = 1, 2, 3, 4)$. 则 $P(X(n+3) = 3,\ X(n+1) = 1 | X(n) = 2) =$ ________.

(6) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, 则概率 $P(X_i = \min\{X_1, \ldots, X_n\}) =$ ________.

二、 (15分) 经过高速公路收费站的某物流公司的运货车辆数$N(t)(t \geq 0)$为一强度为100的泊松过程。设该公司的运货车分为大、中、小三个类型，三类车的数量比例为2:3:5，又设经过收费站的每辆车属于哪一类是相互独立的。现分别以$N_1(t)$、$N_2(t)$和$N_3(t)$代表到t时刻为止经过收费站的大、中、小三类车的数目，

(1) 问$N_1(t)$、$N_2(t)$和$N_3(t)$分别是什么过程？

(2) 试证明对固定的$t > 0$，$N_1(t)$、$N_2(t)$和$N_3(t)$相互独立；

(3) 若经过收费站时，大、中、小三类车每辆需缴费80元，50元和30元，试求到时刻t为止该公司运货车所缴纳的总费用$X(t)$的期望和方差。

三、 (15分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个马氏链,其一步转移概率如下图所示.

(1) 写出该链的等价类,且讨论所有状态的周期,常返性和正常返性;

(2) 对所有的$n > 0$,计算状态1经n步首达状态3的概率$f_{13}^{(n)}$;

(3) 计算从 状态 6 出发首次到达状态 5 需要的平均步数。

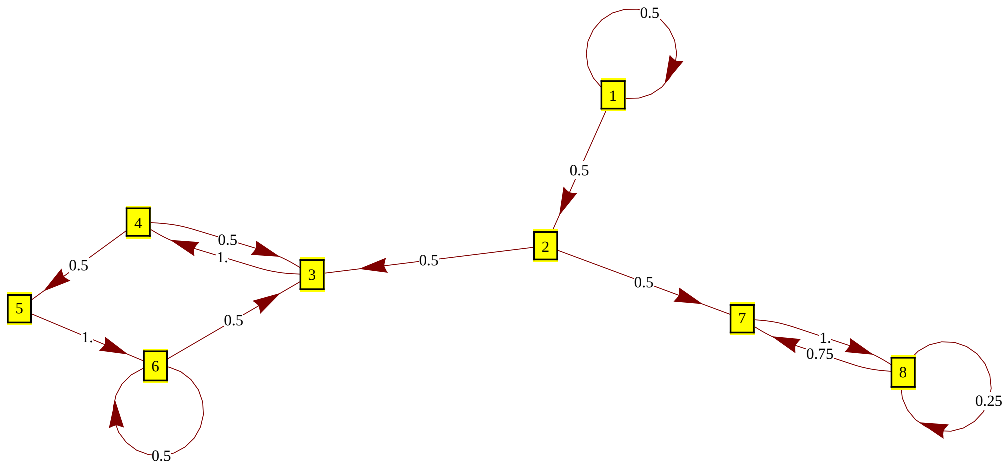

Figure 1: 第三题

四、 (15分) 对于某河流每年汛期流量的观测值可用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来表示，其中状态 -1表示"干旱"，"0" 表示正常，"1"表示洪涝。试根据下列25年连续观察数据：

$$-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1$$

(1) 确定该马氏链的一步转移概率矩阵 P (用转移频率估计转移概率);

(2) 证明该马氏链是不可约遍历的;

(3) 试分别求出洪涝与干旱发生的平均间隔（年）.

五、 (15分) 考虑一个随机过程

$$X(t) = U\cos(\omega t) + V\sin(\omega t), \quad -\infty < t < \infty,$$

其中 ω 是常数，U 和V 是随机变量.

(1) 证明 如果$X(t)$ 是宽平稳过程，那么 $E[U] = E[V] = 0$;

(2) 证明 $X(t)$ 是宽平稳过程当且仅当

$$E[UV] = 0,\ \ E[U^2] = E[V^2] < \infty.$$

六、 (15分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 9\omega^2 + 14},\ -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

(完)