一、Poisson 过程

2016-2017 秋

(1) 设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程，则 $\mathrm{Cov}(N(t), N(s))=$ $\underline{\lambda \min\{s,t\}}$.

if $t>s$ $\mathrm{Cov}(N(t), N(s))$

$= \mathrm{Cov}(N(s), N(t)-N(s)+N(s)) = \mathrm{cov}(N(s), N(s)) = \lambda s$

(3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为λ_1, λ_2, λ_3 的Piosson过程到达，且相互独立。若不论颜色，第一辆汽车平均到达时间为$\underline{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}$；第一辆红色汽车的平均到达时间为$\underline{\frac{1}{\lambda_1}}$。

参考 EX5 第6题

(4) 设$[0, t]$内到达某商店门口的顾客数$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda > 0$的Poisson过程，每个达到的顾客依概率p 进入店内，以概率$1-p$ 不进店即离开，且顾客是否进店是相互独立的；进店的每个顾客又独立地以概率q 进行消费，以概率$1-q$不消费。则进店的顾客数的均值和方差为$\underline{\lambda p}$和$\underline{\lambda p}$；消费的顾客数的均值和方差为$\underline{\lambda p(1-q)}$和$\underline{\lambda p(1-q)}$。

批注：这里两个空都是 λ pt

批注：这里两个空都是 λ pqt

(4) 解：略，EX5 第1题

二、 (16分) 设某人甲负责订阅杂志，前来订阅的顾客数是日均到达率为6 的泊松过程$\{N(t), t\ge 0\}$。若每个顾客的订阅季数$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.且各人的选择相互独立。设 $N_i(t)$ 为订阅 i 季杂志的顾客人数，$i=1,2,3$. 并以 $\{X(t)\}$ 表示到时刻 t 为止甲所得全部手续费（假设每订出一季杂志，甲可得手续费 1 元），

$\lambda_1=3, \lambda_2=2, \lambda_3=1$

(1) 问 $N_i(t)$，$i=1,2,3$ 分别是什么过程？它们是否相互独立？

(2) 试求：$E[X(t)]$，$Var(X(t))$, 及$X(t)$ 的矩母函数$g_{X(t)}(u)=E[e^{uX(t)}]$.

解: (1) 易验证 $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 分别服从HPP(3),HPP(2),HPP(1)

下面验证相互独立:

$$P(N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3) \qquad n=n_1+n_2+n_3$$

$$= P(N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3 \mid N(t)=n)\cdot P(N(t)=n)$$

$$= C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n_2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{n_3} \frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n_2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{n_3} \frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n$$

$$= P(N_1(t)=n_1)\cdot P(N_2(t)=n_2)\cdot P(N_3(t)=n_3) \Rightarrow \text{相互独立} \qquad \#$$

(2) $X(t) = N_1(t) + 2N_2(t) + 3N_3(t)$

$$EX(t) = 1\cdot 3t + 2\cdot 2t + 3\cdot t = 10t$$

$$Var(X(t)) = Var(N_1(t)) + Var(N_2(t)) + Var(N_3(t))$$

$$= 10t$$

批注：这个方差Var(Xt)应该为20t，解答忘了将系数进行平方

$$g_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}]$$

$$= E e^{[N_1(t)+2N_2(t)+3N_3(t)]u}$$

$$= g_{N_1(t)}(u)\cdot g_{N_2(t)}(2u)\cdot g_{N_3(t)}(3u)$$

$$g_{N_1(t)}(u) = E e^{uN_1(t)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{u\cdot n}\cdot P(N_1(t)=n)$$

$$= e^{\lambda t(e^u-1)}$$

$$\therefore g_{X(t)}(u) = e^{t[3(e^u-1)+2(e^{2u}-1)+(e^{3u}-1)]} \qquad \#$$

2016-2017 春

2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $\mathrm{E}[N(1)N(2)] =$ $\lambda+2\lambda^2$; $\mathrm{E}[N(10)|N(5)] =$ $5\lambda+N(5)$; 若又已知 $N(3)=1$, 则 $\mathrm{P}(N(2)-N(1)=1) =$ $\frac{1}{3}$.

3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是 e^{-6}. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 $Exp(3)$ $\lambda=3$

8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是(C)

(A) 宽平稳过程具有平稳增量性 ⇒ 平稳、增量是指相同间隔内分布相同，而宽平稳只有协方差相同

(B) Possion过程是宽平稳过程 ⇒ $Cov(X(s), X(t)) = \lambda \min\{s,t\}$

(C) 初始状态服从平稳分布的Markov过程为严平稳过程

(D) 严平稳过程一定是宽平稳过程 ⇒ 需要二阶矩存在

解. 2、1° $EN(1)N(2) = Cov(N(1), N(2)) + EN(1)\cdot EN(2)$

$Cov(N(1), N(2)) = \lambda \min\{1,2\} = \lambda$

$EN(1)\,EN(2) = \lambda \cdot 2\lambda = 2\lambda^2$

2° $E[N(10)|N(5)]$

$= E[N(10)-N(5)+N(5)|N(5)]$

$= E[N(10)-N(5)|N(5)] + N(5)$

$= 5\lambda + N(5)$

3° $P(N(2)-N(1)=1 \mid N(3)=1)$

$= P(N(2)-N(1)=1, N(3)=1) / P(N(3)=1)$

$P(N(2)-N(1)=1, N(3)=1)$

$= P(N(1)=0, N(2)=1, N(3)=1)$

$= P(N(1)=0)\cdot P(N(2)-N(1)=1)\cdot P(N(3)-N(2)=0)$

$= e^{-\lambda}\cdot \lambda e^{-\lambda}\, e^{-\lambda} = \lambda e^{-3\lambda}$

$P(N(3)=1) = 3\lambda e^{-3\lambda}$ #

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目 $N(t)$ 服从参数为 λ 的 Poisson 过程，每个电子携带能量相互独立且与电子数目 $N(t)$相互独立，并均服从区间 $[1,2]$ 上的均匀分布，设到 t 时刻的阳极接受的能量为 $S(t)$. 求$S(t)$ 的均值 $\mathrm{E}[S(t)]$ 和 方差$\mathrm{Var}[S(t)]$.

解：$S(t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k & N(t)\geq 1\\ 0 & N(t)=0.\end{cases}$

1° $E[S(t)]=E[E(S(t)|N(t))]$

$E(S(t)|N(t)=n)$

$=\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{3}{2}n & n\geq 1\end{cases}$ $\Rightarrow$ 统一成$\frac{3}{2}n$

$\therefore E[S(t)]=\frac{3}{2}E[N(t)]=\frac{3}{2}\lambda t$

2° $\mathrm{Var}(S(t))=E[\mathrm{Var}(S(t)|N(t))]+\mathrm{Var}[E(S(t)|N(t))]$

$\mathrm{Var}[S(t)|N(t)=n]$

$=n\,\mathrm{Var}\,Y_i=\frac{n}{12}$

复合泊松过程的方差

$\therefore \mathrm{Var}(S(t))=\frac{9}{4}\mathrm{Var}(N(t))+\frac{1}{12}E(N(t))$

$=(\frac{9}{4}+\frac{1}{12})\lambda t=\frac{7}{3}\lambda t$ #

$\mathrm{Var}(S(t))=\mathrm{Var}(Y_i)\cdot E[N(t)]+[E(Y_i)]^2\cdot \mathrm{Var}[N(t)]$

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车，分别按强度为 λ_1, λ_2 和λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站，

(1) 若不论颜色，求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望；

(2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下，

(a) 下一辆仍是红车的概率是多少？ (b) 下一辆是黄车的概率是多少？

(3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下，接下来通过的 k 辆全是红车，而后是非红车的概率是多少？ ($k\geq 0$)

(4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有n 辆的概率, $n=0,1,2,\cdots$.

解：略，EX 5 第 6 题 #

2019 期末

(3) 设有复合泊松过程$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$，其中$N(t)$是强度为$\lambda$的泊松过程，$Y_i\sim Exp\{\mu\}$. 则
$EX(t)=$ $\frac{\lambda t}{\mu}$，$E[X^2(t)]=$ $\frac{\lambda t(\lambda t+2)}{\mu^2}$，$g_{X(t)}(s)=E\exp\{sX(t)\}=$ $e^{\frac{\lambda t s}{\mu-s}}$.

解：同上面第二题

1° $EX(t)=EY_i\cdot EN(t)=\frac{\lambda t}{\mu}$

2° $Var\,X(t)=(EY_i)^2\,Var(N(t))+(Var\,Y_i)\cdot E(N(t))$

$=\frac{1}{\mu^2}\cdot\lambda t+\frac{1}{\mu^2}\lambda t=\frac{2\lambda t}{\mu^2}$

$\therefore E[X^2(t)]=\frac{2\lambda t}{\mu^2}+\left(\frac{\lambda t}{\mu}\right)^2=\frac{\lambda t(\lambda t+2)}{\mu^2}$

3° $g_{X(t)}(S)=E[e^{sX(t)}]$

$E[e^{sX(t)}\mid N(t)=n]$

$=[g_Y(S)]^n$ $\boxed{g_Y(S)=\frac{\mu}{\mu-S}}$ 指数分布的mgf

$\therefore g_{X(t)}(S)=\sum_{n=0}^{+\infty}[g_Y(S)]^n\cdot P(N(t)=n)$

$=e^{\frac{\lambda t S}{\mu-S}}$ #

二、(8分)保险公司的理赔次数$N(t)$是强度为λ的泊松过程，诸次理赔额$C_i(i\geqslant 1)$为独立同分布，且与$N(t)$独立，$EC_i=\mu$. 又设W_i为第i次理赔发生的时间$(i\geqslant 1)$，则到时刻t为止的理赔总额的折现值为：

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}C_ie^{-\alpha W_i}$$

其中$\alpha>0$为折现率，试求$C(t)$的期望值.

解：$E[C(t)\mid N(t)=n]$

$=E[\sum_{i=1}^{n}C_ie^{-\alpha W_i}\mid N(t)=n]$

$=E(C_i)\cdot E[\sum_{i=1}^{n}e^{-\alpha W_i}\mid N(t)=n]$

$=\mu\cdot E[\sum_{i=1}^{n}e^{-\alpha U_i}\mid N(t)=n]$

$=\mu\cdot\frac{n}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$

$\therefore E[C(t)]=\frac{\mu}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})\cdot E[N(t)]=\frac{\lambda\mu}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$ #

(1)设X与Y相互独立，分别服从指数分布$Exp\{\lambda\}$与$Exp\{\mu\}$，则：

(a) $X+Y \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. （$\times$）

(b) $\min\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. （$\checkmark$）

(c) $\max\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. （$\times$）

(d) $P\{X>h\} = 1-\lambda h + o(h)$, $h \downarrow 0$. （$\checkmark$）

(e) $P\{X \le s+t \mid X > s\} = P\{X \le t\}$, $s,t>0$. （$\checkmark$）

无记忆性

解：(c) $P(\max\{X,Y\} \le x)$

$= P(X \le x, Y \le x) = (1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\mu x})$

(d) $P(X>h) = e^{-\lambda h} = 1-\lambda h + o(h)$ (Taylor展开) #

2019.1.10

（3）（填空）设X_1,X_2,X_3相互独立，且$X_i \sim Exp(\lambda_i), i=1,2,3$（指数分布），则

$X_{(1)} = \min\{X_1,X_2,X_3\}$的分布为（ $Exp(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ），概率 $P\{X_1 = X_{(1)}\}$等于（ $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ ）。

解：(3) $P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x)$

$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x}$

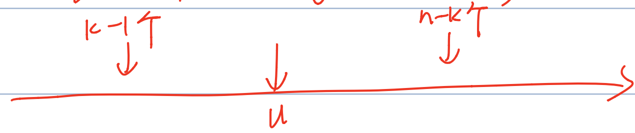
$P(X_1 = X_{(1)}) = P(X_1 < X_2, X_1 < X_3)$ 联合分布

$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$

（4）（**填空**）设$\{N(t), t\ge 0\}$是一强度为λ的 Poisson 过程，W_k为其第k个事件发生的时间，并设$1\le k\le n, t>0$，则$E\{W_k \mid N(t)=n\}=$（ $\frac{k}{n+1}t$ ），$E(W_k)=$（ $\frac{k}{\lambda}$ ）。

解：1° 给定 $N(t)=n$ 下，$(W_1,\cdots,W_n)$ 同分布于均匀分布次序统计量

$\therefore E\{W_k \mid N(t)=n\} = EU_{(k)}$



$U_{(k)}$ 的 pdf 为：$f_k(u) = nC_{n-1}^{k-1} F^{k-1}(u)\, f(u)\, \bar{F}^{n-k}(u)$

$$= nC_{n-1}^{k-1} \left(\frac{u}{t}\right)^{k-1} \frac{1}{t} \left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k}$$

$$EU_{(k)} = \int_0^t u C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{u}{t}\right)^{k-1} \left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k} d\frac{u}{t}$$

$$= tnC_{n-1}^{k-1} \int_0^1 r^k (1-r)^{n-k} dr$$

$$= tnC_{n-1}^{k-1} B(k+1, n-k+1)$$

$$= t \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$= t \cdot \frac{k}{n+1}$$

2° $N(t)\ge k \Leftrightarrow W_k \le t$

某次作业证明过 W_k 服从 $\Gamma(k,\lambda)$

$$g_k(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \quad t\ge 0$$

$$EW_k = \int_0^{+\infty} t\, g_k(t)\, dt$$

$$= \frac{k}{\lambda}$$

二、（8 分）假设汽车按强度为λ的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路，进入的第i辆车以速度V_i行驶。假定诸V_i（$i \geq 1$）为相互独立的正随机变量，有共同分布F。

试求在时刻t位于区间(a,b)内的平均汽车辆数。

解：设第i辆车于时刻 S 进入公路

若 t 时刻还在区间 (a,b) 内，记为 I 型事件

则要求 $a < V_i(t-S) < b$

$\therefore p(S) = P(a < V_i(t-S) < b)$

$= F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right)$

即时刻 S 发生的事件以概率 $p(S)$ 划入 I 型事件

$N_1(t) \sim Poisson(\lambda p t)$

$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds$

$\therefore EN_1(t) = \lambda p t = \lambda\int_0^t [F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right)]ds$ #

（3）到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为（ $\frac{1}{12}$ ），第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为（$\left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{4}$

解：1° $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$

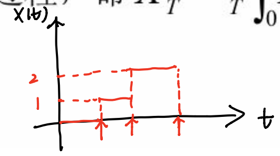
$N(t) \sim HPP(12)$

2° 参考 EX5 第6题

$\left(\frac{9}{12}\right)^k \cdot \frac{3}{12}$ #

（4）设 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，命 $X_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，则：

$E(X_T) = (\frac{1}{2}\lambda T)$，$Var(X_T) = (\frac{1}{3}\lambda T)$。



解 1° $T\cdot X_T = \sum_{k=1}^{X(T)} (S_k - S_{k-1})(k-1) + [T - S_{X(T)}]\cdot X(T)$

$= X(T)\cdot T - \sum_{k=1}^{X(T)} S_k$

$X_T = X(T) - \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{X(T)} S_k$

$E(X_T \mid X(T)=n) = n - \frac{1}{T}E\left[\sum_{k=1}^{n} S_k \mid X(T)=n\right]$

$= n - \frac{1}{T}\cdot\frac{nT}{2} = \frac{n}{2}$

$\therefore E(X_T) = E\{\frac{1}{2}X(T)\} = \frac{1}{2}\lambda T$

2° $Var(X_T) = Var[E(X_T \mid X(T))] + E[Var(X_T \mid X(T))]$

$Var(X_T \mid X(T)=n) = \frac{1}{T^2} Var(\sum_{k=1}^{n} S_k \mid X(T)=n)$

$= \frac{1}{T^2} Var(\sum_{k=1}^{n} U_k \mid X(T)=n)$

$= \frac{1}{T^2}\cdot\frac{1}{12}T^2\cdot n = \frac{n}{12}$

$\therefore Var(X_T) = E[\frac{1}{12}X(T)] + Var[\frac{1}{2}X(T)]$

$= \frac{1}{12}\lambda T + \frac{1}{4}\lambda T = \frac{1}{3}\lambda T$ #

（5）到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t) = 2 + t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(e^{-8})，午时段到达商店的平均人数为(8)。

解：以 8:00 为起点，对非齐次 Poisson 过程，有：

$P(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!} e^{-[m(t+s)-m(t)]}$

$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$

$\therefore P(N(5) - N(3) = 0) = e^{-8}$

$E[N(5) - N(3)] = m(5) - m(3) = 8$ #

二、（15 分）设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程，若以

注意：强度、速率均指入

Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿，并假定 $Y_i \sim U(1,3)$（均匀分布，单位：万元），且 $\{Y_i, i \geq 1\}$ 为 i.i.d.，试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的期望 $EX(t)$、方差 $Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$。(均匀分布矩母函数：$g(s)=\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$.)

$g_Y(s)=\frac{e^{3s}-e^{s}}{2s}$

解：1° $E[X(t)\mid N(t)=n]$

$= n\cdot EY = 2n$

$\therefore EX(t) = E[2N(t)] = 2\lambda t = 10t$

2° $Var(X(t)) = E[Var(X(t)\mid N(t))] + Var[E(X(t)\mid N(t))]$

$Var(X(t)\mid N(t)=n)$

$= n\,Var(Y_i)$

$\therefore Var[X(t)] = E[X(t)]\cdot Var Y_i + (EY)^2\cdot Var[N(t)]$

$= \frac{65}{3}t$

3° $g_{X(t)}(s) = Ee^{sX(t)}$

$= E\{E(e^{s\cdot X(t)} \mid X(t)=n)\}$

$E(e^{s\cdot X(t)} \mid X(t)=n)$

$= E(e^{s\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i} \mid X(t)=n)$

$= E[e^{s\cdot Y_1}\cdot\cdots\cdot e^{s\cdot Y_n}] = E(e^{sY_1})\cdot\cdots\cdot E(e^{sY_n})$

$= [g_Y(s)]^n$

$\therefore g_{X(t)}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty}[g_Y(s)]^k\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$= e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t g_Y(s)}$

$= e^{\lambda t(g_Y(s)-1)}$ #

二、平稳分布

(5) 设$X(t) = A\sin(2\pi\Theta_1 t + \Theta_2)$，A 为常数，$\Theta_1$，$\Theta_2$ 为相互独立的随机变量，Θ_1的密度函数为一个偶函数，而Θ_2 服从区间$[-\pi,\pi]$上的均匀分布，则其均值函数为 0 ，协方差函数为 $\frac{1}{4\pi^2\tau}\sin 2\pi^2\tau$ ，从而该过程为 宽平稳 。

解：1° $X(t) = A[\sin 2\pi\Theta_1 t\cos\Theta_2 + \cos 2\pi\Theta_1 t\sin\Theta_2]$

$E[X(t)] = A[E(\sin 2\pi\Theta_1)E(\cos\Theta_2) + E(\cos 2\pi\Theta_1)E(\sin\Theta_2)]$

$E\sin\Theta_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta_1 d\theta_1 = 0$

$E\cos\Theta_1 = 0$

$\therefore E[X(t)] = 0$

$E(\cos 2\Theta_2) = 0$

$E(\sin 2\Theta_2) = 0$

2° $Cov(X(t), X(t+\tau))$

$= E[X(t)X(t+\tau)]$

$= \frac{1}{2}E[\cos(2\pi\Theta_1\tau) - \cos(4\pi\Theta_1 t + 2\pi\Theta_1\tau + 2\Theta_2)]$

$= \frac{1}{2}E[\cos 2\pi\Theta_1\tau] + 0$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\pi\theta_1\tau\, d\theta_1$

$= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{2\pi\tau}\cdot 2\sin 2\pi^2\tau$

$= \frac{1}{4\pi^2\tau}\sin 2\pi^2\tau$ #

五、 (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2+5}{\omega^4+11\omega^2+24}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

(1) $S(\omega) = \frac{2}{5}\frac{1}{\omega^2+3} + \frac{3}{5}\frac{1}{\omega^2+8}$

$= \frac{1}{5\times\sqrt{3}}\frac{2\times\sqrt{3}}{\omega^2+3} + \frac{3}{5\times 4\sqrt{2}}\frac{2\times 2\sqrt{2}}{\omega^2+8}$

$R(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{15} e^{-\sqrt{3}|\tau|} + \frac{3\sqrt{2}}{40} e^{-2\sqrt{2}|\tau|}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |R(\tau)| d\tau < +\infty$ 有 #

2017 年春

五. (8分) 设$X(t) = Y\cos(\omega t + \Theta)$, 其中 ω 为常数, $\boxed{Y}$ 服从均值为μ, 方差为 σ^2 正态分布，$\boxed{\Theta}$服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布，且 Y 与Θ 相互独立. 试判断$X(t)$ 是否为宽平稳过程。如是，请给出证明；否则，请说明原因。

解: 1° $E[X(t)]$

$= E(Y)\cdot E(\cos(\omega t+\Theta))$

$E(\cos(\omega t+\Theta))$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega t+\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{2\pi} \sin(\theta+\omega t)\Big|_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2\pi}[\sin(2\pi+\omega t) - \sin\omega t] = 0$

2° $R(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

$= E(Y^2)\, E[\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)]$

$= (\mu^2+\sigma^2)\frac{1}{2}E[\cos\omega\tau + \cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)]$

$= \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)\cos\omega\tau$

宽平稳. #

六. (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+21}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

解：略 #

2019 年期末

(2) 关于平稳过程，下列说法是否正确

(a) 宽平稳过程具有平稳增量性. （×）

(b) Poisson过程是平稳过程. （×）

(c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. （√）

(d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. （√）

解：略，同前面某一选择题

五、(15 分)设 A 与 Θ 独立且分别服从均匀分布 $U(0,1)$ 与 $U(0,2\pi)$，定义过程：

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta) \quad （t \in R，\ \omega_0 \text{ 为非零常数}）$$

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

解：略

六、（12 分）设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2+3}{\omega^4+11\omega^2+28}$$

解：略

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

（2）（**是非**）下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为(实或复)平稳过程的协方差函数？

$(a)\ R(\tau)=e^{-|\tau|}(|\tau|+1)^2$ (×)； $(b)\ R(\tau)=|\tau|e^{-\tau^2/2}$ (×)； $(c)\ R(\tau)=\frac{\sin\tau}{\pi\tau}$ (√)

$R(1)=\frac{4}{e}>R(0)=1$　　　$R(0)<R(1)$

$(d)\ R(\tau)=\sigma^2 e^{i\lambda\tau}$ (√)； $(e)\ R(\tau)=\sigma^2 e^{-i\lambda|\tau|}$ (×)。（注：$\sigma,\lambda>0,\ i=\sqrt{-1}$）

$\Downarrow$

$\overline{R(\tau)}\neq R(-\tau)$

解：$R(\tau)$ 有如下性质：

① $\overline{R(\tau)}=R(-\tau)$

② $R(0)\geq|R(\tau)|$ $\Bigg\}\Rightarrow$ 常用这两条判断

③

④

\#

2019 期末

五、(15分)考察下列函数 $S_i(\omega),(\omega\in R)$:

$$S_1(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2},\quad S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6},\quad S_3(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3},$$

② ×　　√　　③ ×

$$S_4(\omega)=\frac{\omega^2-4}{\omega^4+4\omega^2+3},\quad S_5(\omega)=\frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2}(i=\sqrt{-1}),\quad S_6(\omega)=\frac{4a\cos\omega}{\omega^2+a^2}(a>0).$$

③ ×　　① ×　　③ ×

(1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数？并进而求出其对应的协方差函数 $R(\tau)$.

(2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性？为什么？

解：(1) 谱密度函数特点：① $\overline{S(\omega)}=S(\omega)\Rightarrow$ 实函数

② $S(\omega)=S(-\omega)\Rightarrow$ 偶函数

③ $S(\omega)\geq 0$

(2) $S_2(\omega)=-\frac{1}{\omega^2+2}+\frac{2}{\omega^2+3}$

$R_2(\tau)=-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|\tau|}+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_2(\tau)|d\tau<+\infty$　　有

\#

六、 (7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中U ~U$(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, 方差为σ^2的白噪声序列, U与$\{\varepsilon_t\}$独立. 作矩形窗滤波, $M > 0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} X_{t-j}$$

1)试问Y_t是平稳过程吗? 为什么?

2)求出Y_t的方差.

解: (1) 1° $EX_t = bE[\cos(wt+U)] + E(\varepsilon_t)$

$= 0$

$\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$

2° $R(\tau) = E[X_t X_{t+\tau}]$

$= b^2 E[\cos(wt+U)\cdot\cos(w(t+\tau)+U)] + \sigma^2\delta(\tau)$

$= \frac{1}{2}b^2 E[\cos(w\tau) + \cos(2wt + w\tau + 2U)] + \sigma^2\delta(\tau)$

$= \frac{1}{2}b^2\cos w\tau + \sigma^2\delta(\tau)$

X_t宽平稳,

对Y_t:

1° $EY_t = 0$

2° $R_Y(\tau) = E(Y_t Y_{t+\tau})$

$= \frac{1}{(2M+1)^2} E[\sum_{j=-M}^{M}\sum_{i=-M}^{M} X_{t-j} X_{t+\tau-i}]$

$= \frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{j=-M}^{M}\sum_{i=-M}^{M}[\frac{b^2}{2}\cos w(\tau-i+j) + \sigma^2\delta(\tau-i+j)]$

$\therefore Y_t$宽平稳,

(2) $Var\, Y_t = R(0)$ #

2020 年 1 月

①$\overline{S(w)} = S(w)$
② $S(w) = S(-w)$
③ $S(w) \geq 0$

（2）下列函数是否为平稳过程的谱密度函数：

③×

$a.\ S_1(\omega) = \frac{\omega^2 - 16}{\omega^4 + 11\omega^2 + 18}$ （ × ）；　　$b.\ S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$ （ √ ）；

$c.\ S_3(\omega) = \frac{\omega^2 \cos\omega}{\omega^4 + 1}$ （ ×）；　　$d.\ S_4(\omega) = \frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2 + a^2}, (i = \sqrt{-1})$ （× ）

③×　　①×

五、(15 分)设 A 与 Θ 独立，$A \sim Exp(1/3)$(指数分布)，$\Theta \sim U(0, 2\pi)$(均匀分布)，定义随机过程：

$$X(t) = A\cos(t + \Theta), \quad (t \in R)$$

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

解：略

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、（10 分）设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

解：略

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

三、马氏过程

2016-2017 秋

批注：此题C选项是正确的，j是非周期，证明思路可以从证明Pjj^(m)大于0以及Pjj^(m+1)大于0说明j非周期，还是有问题的话可以问我或者去看21号的习题课视频

(2) （判断是非）设有 $m \geq 1$ 使得对于马氏链的所有状态 i，有 $P_{i,j}^{(m)} > 0$，则：

A $d(j)|m$, 其中 $d(j)$ 为 j 的周期; (√)

$P_{ij}^{m} = \sum_{k=0}^{m} f_{ij}^{k} P_{jj}^{m-k}$

B $d(j) = m$; (X)

C j 是非周期的; (X)

$P_{jj}^{m} = \sum_{k=0}^{m} f_{jj}^{k} P_{jj}^{m-k}$

D j 的周期为无穷; (X)

(6) 设马氏链的状态 i 是周期为 d 的常返状态，μ_i 为状态 i 的平均常返时，则$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} =$ $\frac{d}{\mu_i}$。

(2) 解：A. $P_{jj}^{m} > 0$ $\therefore d(j)|m$

D. $P_{jj}^{m} = \sum_{k=0}^{m} f_{jj}^{k} P_{jj}^{m-k} > 0$

$\therefore \exists f_{jj}^{k} > 0$，知 j 的周期一定不是无穷

三、 (20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时（$n=0$）均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月（单位时间）顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器)如下图所示.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明该链为不可约、遍历的;

解：略 EX7第2题

(2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?

(3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、 (16分) 逐个随机地把球放入到 a 个盒子中去（可重复放），以 X_n 表示放了 n 个球之后的空盒数，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链，

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P，并进行状态分类；

(2) 试求放满 a 个盒子的平均时间（次数）。 解：略，EX7 第3题

2017 秋

4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.45 & 0.15 \\ 0.27 & 0.45 & 0.27 \\ 0.15 & 0.45 & 0.4 \end{pmatrix}$$

若 X_0 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则 X_2 的分布律为____________; 且该Markov 链的平稳分布为__________.

$P(X_2=1) = P(X_2=1 | X_0=1) \cdot P(X_0=1)$

$+ P(X_2=1 | X_0=2) \cdot P(X_0=2)$

$+ P(X_2=1 | X_0=3) \cdot P(X_0=3)$

解：1° X_2 分布律为：

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) P^2$

2° 平稳分布 $\pi P = \pi$

5. 在离散时间Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是(C).

(A) 若状态 i 常返且 $j \to i$, 则状态 j 也是常返的

(B) 若状态 i 常返且 $i \to j$, 则状态 j 不一定是常返的

(C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在 为0

(D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在 (考虑周期情形)

批注：第6题答案是ABC，具体要清楚极限分布的定义，可以去看第五次习题课讲义最后部分

6. 关于离散时间Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是(A).

(A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布 EX9 第1题的结论 (只要有正常返类，一定有平稳分布，若只有一个正常返类，则平稳分布唯一)

(B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等

(C) 极限分布若存在则与 X_0 的取值无关

(D) 平稳分布若存在则必唯一

$\left\{ \begin{array}{l} \text{极限分布与} X_0 \text{取值有关} \\ \text{平稳分布与其无关} \end{array} \right.$

7. 关于直线上的简单对称随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是(D).

(A) 所有状态的周期均为2 所有状态零常返

(B) $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个Markov 链且无平稳分布

(C) 若 $X_0 = 0$, 则对任意整数 n, 其最终能到达它的概率为1

(D) 若 $X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的

四. (15分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$（全体非负整数），转移概率为

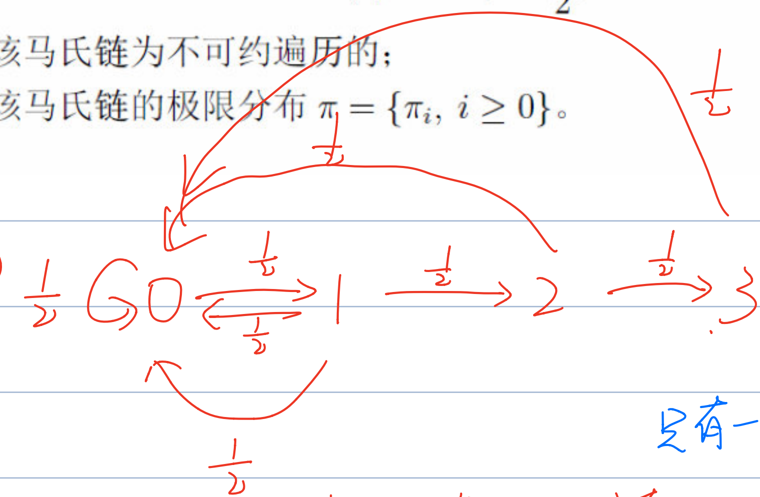
$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

(1) 证明该马氏链为不可约遍历的；

(2) 试求该马氏链的极限分布 $\pi = \{\pi_i, i \geq 0\}$。

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

解：(1)



只有一个正常返类，所以平稳分布唯一

所有状态互达 + 有限状态，⟹ 所有状态正常返

$f_{00}^{1} = \frac{1}{2} \quad d(0) = 1 \quad \therefore$ 不可约遍历

(2) $\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \pi_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

#

2019 . 1.10

$\forall n$, X_n 的分布也为平稳分布

⟹

（1）（是非）若马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布 $\pi = \{\pi_j, j \geq 0\}$ 为其平稳分布，则：

X_n 的分布

(a) $\sum_{i\geq 0} \pi_i p_{i,j}^{(n)} = \pi_j, (j \geq 0, n \in N)$ （✓）；(b) X 为严格平稳过程（✓）

(c) $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}, (i, j \geq 0)$ （✗）；(d) X 必有正常返状态（✓）。

⇓ 考虑周期情形

⇓ 对应 $\pi_i > 0$ 的那些状态

解：(a) 若 X_0 为平稳分布，则 $\forall n$，X_n 均为平稳分布

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i P_{ij}^{n}$$

(b) 由 M.C. 性质，对 $\forall n \in N_+$，$t_1, \cdots, t_n \in Z$，有：

$$(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \overset{d}{=} (X(t_1+k), \cdots, X(t_n+k)).$$ #

三、（15 分） 设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的转移概率为：

$$p_{0,j}=a_j>0,\ (j\geq 0)\quad p_{i,i-1}=1,\ (i\geq 1)$$

（1）证明该马氏链为不可约常返的，且为非周期；

（2）试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间 μ_0，并据以回答：过程何时为正常返？何时为零常返？

（3）在正常返时，试求该马氏链的极限分布：$\pi=\{\pi_j, j\geq 0\}$。

解：(1) 易知所有状态均互达，所以不可约

$$P=\begin{array}{c}0\\1\\2\\\vdots\end{array}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$f_{00}^{1}=a_0 \qquad \Rightarrow d(0)=1$$

$$f_{00}^{2}=P(X_1=1, X_2=0\mid X_0=0)=a_1$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{n}=P(X_1=n-1, X_2=n-2, \cdots, X_n=0\mid X_0=0)=a_{n-1}$$

$$\therefore f_{00}=\sum_{n=1}^{+\infty} f_{00}^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$\therefore$ 不可约，正常返，非周期

(2) $\mu_0=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n f_{00}^{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,a_{n-1}$

正常返 $\Leftrightarrow \mu_0<+\infty$

(3)
$$\begin{cases}\pi P=\pi\\ \sum \pi_i=1\\ \pi_i\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_0=a_0\pi_0+\pi_1\\ \pi_1=a_1\pi_0+\pi_2\\ \vdots\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_1=(1-a_0)\pi_0\\ \pi_2=(1-a_0-a_1)\pi_0\\ \vdots\end{cases}$$

$$\therefore \pi_j=\left(\sum_{k\geq j} a_k\right)\cdot\frac{1}{\mu_0}$$

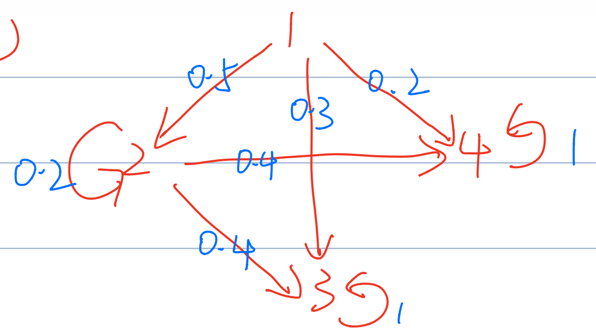
四、（**20 分**）设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

（1） 试讨论该马氏链的状态分类（即：分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返？）。

（2） 试求过程由状态k出发而被状态j吸收的概率$f_{k,j}$，$(k=1,2;\ j=3,4)$。

解：(1)



状态分类 $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$

$f_{11}^{k}=0 \quad k=1,2,\cdots$ 1为暂态 $d(1)=+\infty$

$f_{22}^{1}=0.2,\ f_{22}^{k}=0 \quad k=2,\cdots$ 2为暂态 $d(2)=1$

$f_{33}^{1}=1$ 3为常返 $d(3)=1$

$f_{44}^{1}=1$ 4为常返 $d(4)=1$

(2)
$$\begin{cases} f_{1,3}=P(X_1=3\mid X_0=1)+0.5f_{2,3}\\ \quad\ \ =0.3+0.5f_{2,3} \\ f_{1,4}=P(X_1=4\mid X_0=1)+0.5f_{2,4}\\ \quad\ \ =0.2+0.5f_{2,4}\\ f_{2,3}=0.4+0.2f_{2,3}\\ f_{2,4}=0.4+0.2f_{2,4}\end{cases}$$

先从1跳到2

$\Rightarrow f_{1,3}=\frac{11}{20},\ f_{1,4}=\frac{9}{20},\ f_{2,3}=f_{2,4}=\frac{1}{2}$ #

2019 期末

(4) 现有对于一个三状态的马氏链$\{X_n, n\geqslant 0\}$的25个连续观察数据:

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1,
-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1,

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵P为________________.

解：EX7第1题，略

三、 (20分)质点在一正N边形($N\geq 3$)的周边上作随机游动(顶点$1,2,...,N$按顺时针方向排列)，质点以概率p顺时针游动一格，以概率$q=1-p$ 逆时针游动一格，试用一马氏链$\{X_n, n\geqslant 0\}$描述该模型，并
(1)写出该马氏链的转移概率矩阵P，并作状态分类;

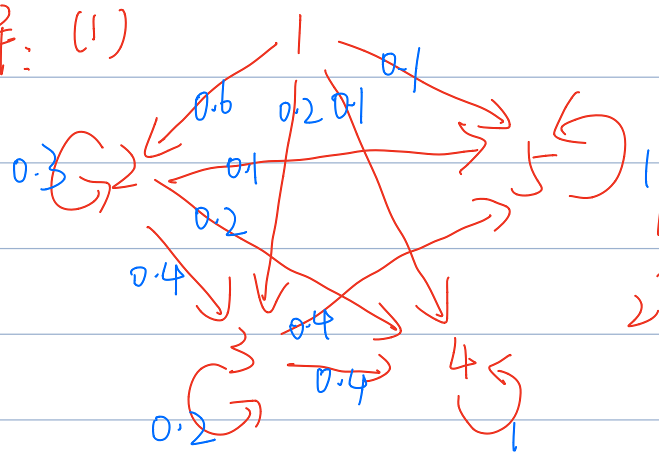
解：类似EX7第6题，略

四、 (20分)设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的转移概率矩阵为:

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

(1)试对该马氏链作状态分类(分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);
(2)试求过程从状态k出发而被状态4吸收的概率$f_{k,4}$及$f_{k,5}$, $(k=1,2,3)$.

解：(1)



S: {1} {2} {3} {4} {5}

所有状态均不互达

1° $f_{11}^{n}=0\ (n\geq 1)$ $f_{11}=0$ $d(1)=+\infty$

2° $f_{22}^{1}=0.3$

$f_{22}^{n}=0\ (n\geq 2)$

$f_{22}=0.3$ $d(2)=1$

3° $f_{33}^{1}=0.2$, $f_{33}^{n}=0\ (n\geq 2)$ $f_{33}=0.2$ $d(3)=1$

4° $f_{44}^{1}=1$ $f_{44}^{n}=0\ (n\geq 2)$ $f_{44}=1$ $d(4)=1$

5° $f_{55}^{1}=1$ $f_{55}^{n}=0\ (n\geq 2)$ $f_{55}=1$ $d(5)=1$

(2) T：状态进入吸收态的时间

对第一步取条件

$$f_{k,4} = P(X_T = 4 \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_i P(X_T = 4 \mid X_1 = i)\, P(X_1 = i \mid X_0 = k)$$

$$\therefore \begin{cases} f_{1,4} = 0.6 f_{2,4} + 0.2 f_{3,4} + 0.1 \\ f_{2,4} = 0.3 f_{2,4} + 0.4 f_{3,4} + 0.2 \\ f_{3,4} = 0.2 f_{3,4} + 0.4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{1,4} = \frac{19}{35},\quad f_{2,4} = \frac{4}{7},\quad f_{3,4} = \frac{1}{2}$$

同理 $f_{1,5} = \frac{11}{35}$, $f_{2,5} = \frac{3}{7}$, $f_{3,5} = \frac{1}{2}$ #

三、(**18 分**) 圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列，一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置，若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j $(j = 1,2,3,4)$，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一马氏链，

（1）求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$，并求 $P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} = ?$

（2）讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$；

（3）极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 是否存在？为什么？

1

4 2

3

解：易知所有状态互达 + 状态有限 ⇒ 所有状态正常返

(1)

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P(X_{n+3}=3, X_{n+1}=1 \mid X_n=2)$$
$$= P(X_{n+3}=3 \mid X_{n+1}=1) \cdot P(X_{n+1}=1 \mid X_n=2)$$
$$= P^2_{13} \cdot P_{21} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$f_{11}^{1} = 0$

$f_{11}^{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore d = 2$

(2) 不可约、正常返，周期为2

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

(3) 不存在 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{2n} = \frac{2}{\mu_i} = 2 \cdot \pi_i = \frac{1}{2} > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{2n-1} = 0$

#

四、（12 分）设$\{X_n, n\geq 0\}$为区间 $[0,3]$上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

试求粒子由k出发而被0吸收的概率p_k及它被吸收的平均步数v_k，$(k=1,2,3)$。

解：定义首达时 $T=\min\{n: n\geq 0, X_n=0\}$

$p_k=P(X_T=0\mid X_0=k)$

$v_k=E(T\mid X_0=k)$

易知 $p_0=1$，$v_0=0$，对第一步取条件有：

$$\begin{cases} p_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2 \\ p_2=\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{3}p_3 \\ p_3=p_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(v_1+1)+\frac{1}{3}(v_2+1) \\ v_2=\frac{1}{3}(v_1+1)+\frac{1}{3}(v_2+1)+\frac{1}{3}(v_3+1) \\ v_3=v_2+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} p_1=p_2=p_3=1 \\ v_1=7,\ v_2=11,\ v_3=12 \end{cases}$$

#