中国科学技术大学

2019-2020 第一学期期末考试题

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　　　得分：_____

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：___________

（2020 年 1 月 6 日，半开卷）

一、(30 分，每空 2 分) 判断是非与填空：

（1）设 $X_0=0,\ X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\ (n\ge 1)$，其中 $\{\xi_i,\ i\ge 1\}$ 为 i.i.d.，且 $P\{\xi_i=-1\}=$

$=P\{\xi_i=1\}=0.5$，则 $\{X_n,\ n\ge 0\}$ 为：

$a.$ 独立增量过程　(　　)；　$b.$ 平稳独立增量过程　(　　)；

$c.$ 正常返马氏链（　　）；　$d.$ 瞬过马氏链　(　　)；　$e.$ $\lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n=0\}=0$。

（2）下列函数是否为平稳过程的谱密度函数：

$a.\ S_1(\omega)=\frac{\omega^2-16}{\omega^4+11\omega^2+18}$ (　　)；　$b.\ S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$ (　　)；

$c.\ S_3(\omega)=\frac{\omega^2\cos\omega}{\omega^4+1}$ (　　)；　$d.\ S_4(\omega)=\frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2+a^2},(i=\sqrt{-1})$ (　　)

（3）到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为（　　），第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为（　　）。

（4）设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，命 $X_T=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，则：

$E(X_T)=($　　　$)$，$Var(X_T)=($　　　$)$。

（5）到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t)=2+t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(　　)，午时段到达商店的平均人数为(　　)。

二、**（15 分）**设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程，若以 Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿，并假定 $Y_i\sim U(1,3)$（均匀分布，单位：万元），且 $\{Y,i\ge 1\}$ 为 i.i.d.，试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$ 的期望 $EX(t)$、方差 $Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$。(均匀分布矩母函数：$g(s)=\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$)

三、(**18 分**) 圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列，一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置，若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j ($j = 1,2,3,4$)，则 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为一马氏链，

（1）求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$，并求 $P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} = ?$

（2）讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$；

（3）极限 $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$ 是否存在？为什么？

四、（**12 分**）设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k,（$k = 1,2,3$）。

五、**(15 分)** 设 A 与 Θ 独立，$A \sim Exp(1/3)$ (指数分布)，$\Theta \sim U(0, 2\pi)$ (均匀分布)，定义随机过程：

$$X(t) = A\cos(t + \Theta), \quad (t \in R)$$

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、(**10 分**) 设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？