随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2019 年 1 月 10 日）

一、（30 分）

（1）（每空 2 分）：a.（ 是 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d.（ 是 ）。

（2）（每空 2 分）：a.（ 非 ）； b.（ 非 ）； c.（是 ） ；d.（是）； e.（非）。

（3）（每空 3 分）（ $1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ），（ $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ） 。

（4）（每空 3 分）（ $\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}/(k-1)!$ ），（ $\lambda t^2/2$ ）

二、（6 分）

若第 i 辆汽车于时刻 s(s<t)进入该公路，则 $P\{a<(t-s)V_i<b\}=F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})$，故第 i 辆车于时刻 t 位于区间（$a,b$）的概率 $p=\frac{1}{t}\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$，从而时刻 t 位于区间（$a,b$）内的平均汽车辆数为 $\lambda pt=\lambda\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$ 。

三、（16 分）

（1） 易证马氏链为不可约($p_{i,j}\ge a_j>0,\forall i\ne j$)、非周期($p_{0,0}^{(1)}=a_0>0$)，且 $f_{0,0}=\sum_{j=0}^{+\infty}a_j=1$，故常返；

（2）求得：$\mu_0=\sum_{n=1}^{+\infty}nf_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_{n-1}$，显然，马氏链为正常返 $\Leftrightarrow \mu_0<+\infty$；

（3） $\pi_j=\frac{1}{\mu_0}\sum_{k\ge j}a_k$，$(j\ge 0)$ 。

四、（20 分）

（1）四类：$\{1\},\{2\}$ 均为瞬过类，$d(1)=\infty, d(2)=1$；$\{3\},\{4\}$ 为二遍历类（吸收态）。

（2）设 T 为过程进入吸收态的时间，记 $f_{k,j}=P\{X_T=j\,|\,X_0=k\},\ (k=1,2;\ j=3,4)$ 则有：

$$
\begin{aligned}
f_{1,3}&=P\{X_T=3\,|\,X_0=1\}=\sum_i P\{X_T=3\,|\,X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,3}+0.3\\
f_{1,4}&=\sum_i P\{X_T=4\,|\,X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,4}+0.2\\
f_{2,3}&=\sum_i P\{X_T=3\,|\,X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,3}+0.4\\
f_{2,4}&=\sum_i P\{X_T=4\,|\,X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,4}+0.4
\end{aligned}
$$

解得： $f_{1,3}=11/20,\ f_{1,4}=9/20,\ f_{2,3}=f_{2,4}=1/2$。

五、（16 分）

（1）

$$EX(t) = EAE\cos(\omega_0 t + \Theta) = 0$$
$$\gamma_X(t+\tau, t) = EA^2 E\cos[\omega_0(t+\tau)+\Theta]\cos(\omega_0 t + \Theta) =$$
$$= \tfrac{1}{2}EA^2 E\{\cos[\omega_0(2t+\tau)+2\Theta] + \cos\omega_0\tau\} = \tfrac{1}{2}EA^2\cos\omega_0\tau$$
$$= 4\cos\omega_0\tau = R_X(\tau)$$

故 $\{\mathrm{X(t)},\ \mathrm{t}\in\mathrm{R}\}$为宽平稳。

（2） $R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 4\pi(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0))$。

六、（12 分）

（1） $S(\omega) \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21}e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12}e^{-2|\tau|}$。

（2）该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau < \infty$。

（完）