

中国科学技术大学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程(A) 得分 _____

所在系 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(2017年6月12日上午14:30—16:30, 半开卷)

一. (30分) 填空或选择题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 1 的Poisson过程, 则

$$P(N(10) = 9 | N(5) = 4) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad E[N(10) | N(5)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新过程, 且 W_k 为其第 k 个更新点($k \geq 1$), 下列中一定正确的是().

(A) 事件 $\{N(t) < k\}$ 与 $\{W_k > t\}$ 等价 (B) 事件 $\{N(t) \leq k\}$ 与 $\{W_k \geq t\}$ 等价
(C) 事件 $\{N(t) > k\}$ 与 $\{W_k < t\}$ 等价 (D) 事件 $\{N(t) \geq k\}$ 与 $\{W_k < t\}$ 等价

3. 关于离散时间Markov链, 下列说法正确的是().

(A) 如果某个状态是常返的, 则过程至少会到达它一次
(B) 所有状态不可能都是非常返的
(C) 若有无穷个状态且不可约, 则所有状态不可能都是正常返的
(D) 若两个状态不互达, 则它们有可能都是常返的

4. 设在一连续时间Markov链中, 对某个给定的时刻 $t_0 > 0$, 有 $X(t_0) = i$, 且已知过程离开状态 i 的速率为 ν_i , 则下列说法中错误的是().

(A) 继续在 i 上停留的时间服从参数为 ν_i 的指数分布 $\text{Exp}(\nu_i)$
(B) 若已知下一步会转移到状态 j , 则继续在 i 上停留的时间服从 $\text{Exp}(\nu_i)$ 分布
(C) 在 t_0 前后两次状态转移的时间间隔服从 $\text{Exp}(\nu_i)$ 分布
(D) 若 ν_i 越大, 则继续在 i 上停留的平均时间越短

5. 设在一状态空间为 $\{0, 1, 2\}$ 的生灭过程中, 每个状态上停留的时间均服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 且转移概率

$$P_{01} = P_{21} = 1, \quad P_{10} = P_{12} = \frac{1}{2}.$$

那么该过程的转移率矩阵 $Q = \underline{\hspace{2cm}}$, 极限分布 $\pi = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 下列过程中一般不具有Markov性的是().

(A) Poisson过程 (B) 更新过程 (C) Yule过程 (D) Brown运动

7. 下列过程中不是Guass过程的是().

(A) 标准Brown运动 (B) 几何Brown运动
(C) Brown桥过程 (D) 带漂移的Brown运动

8. 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准Brown运动, 且 $B(0) = 0$. 对任意 $0 < s < t < \infty$, 随机向量 $(B(s), B(t))$ 服从二元正态分布 $N(\underline{\hspace{2cm}})$; $P(B(t) > 1 | B(s) = 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $\{B_{00}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 为Brown桥过程, 则对任意 $0 \leq s \leq 1$, $\text{Var}[B_{00}(s)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. (12分) 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 试求:

1. 在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率.
2. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布函数.

三. (18分) 独立重复地掷一枚均匀的骰子, 以 X_n 表示前 n 次结果中的最大点数, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个Markov链.

1. 写出该Markov链的状态空间和一步转移概率矩阵.
2. 求概率 $P(X_{n+2} = 4 | X_n = 3)$ 及 $P(X_2 = X_3 = X_4 = 3)$.
3. 问当 $n \rightarrow \infty$ 时, X_n 的极限分布是否存在? 请写出并证明你的结论.

四. (16分) 考虑直线上从原点出发的简单对称随机游动, 记 X_n 表示时刻 n 过程所处的位置, 且

$$Y_n = X_n^2 - n, \quad Z_n = (-1)^n \cos(\pi X_n).$$

证明 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 和 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 均为关于 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的鞅.

五. (8分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个鞅, 对任意 $n \geq 0$, 二阶矩 $E[X_n^2]$ 存在且记 $Y_n = X_n^2$, 问 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是否为一个(上, 下)鞅? 证明你的结论.

六. (16分) 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准Brown运动, 且 $B(0) = 0$.

1. 求 $B(1) + B(2) + B(3)$ 的分布.
2. 在 $B(2) = 1$ 的条件下, 分别求 $B(1)$ 和 $B(3)$ 的分布.