随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2019 年 6 月 24 日）

一、（30 分）

（1）（每空 2 分）：a.（ 非 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d. （ 是 ）；e.（是）。

（2）（每空 2 分）：a.（非 ）； b.（ 非 ）；c.（是 ）；d.（是）。

（3）（每空 3 分）（ $\frac{\lambda t}{\mu}$ ）；（ $\frac{\lambda t(2+\lambda t)}{\mu^2}$ ）；（ $\exp(\frac{\lambda ts}{\mu-s})$ ）。

（4）（3 分）（ $P = \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ）

二、（8 分）

$EC(t) = E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i} \mid N(t)\right]\right\} = \frac{\lambda\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}$ 。

三、（20 分）

（1） $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ N-2 \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ ，（双随机）

不可约、正常返、周期为 2（N 偶）或非周期（N 奇）。

（2）求解：$\pi = \pi P, \sum_j \pi_j = 1$，由：

$$\begin{cases} \pi_1 = q\pi_2 + p\pi_N \\ \pi_2 = p\pi_1 + q\pi_3 \\ \cdots \\ \pi_{N-1} = p\pi_{N-2} + q\pi_N \\ \pi_N = q\pi_1 + p\pi_{N-1} \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_N \end{cases}$$

解得平稳分布：$\pi = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$

（3）当 N 为奇数时，极限分布存在：$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{N}, (1 \le i, j \le N)$，否则不存在。

四、（20 分）

（1）每个状态自成一类。1,2,3 均为瞬过类，其中 1 的周期为无穷，其余为非周期；4,5 为遍历类（吸收态）。

（2）设T 为过程进入吸收态 4 或 5 的时间，则

$$f_{k,4}=P\{X_T=4\,|\,X_0=k\},\ f_{k,5}=P\{X_T=5\,|\,X_0=k\},(k=1,2,3)$$ 其中：

$$f_{1,4}=\sum_i P\{X_T=a\,|\,X_1=i\}p_{1,i}=0.6f_{2,4}+0.2f_{3,4}+0.1$$
$$f_{2,4}=0.3f_{2,4}+0.4f_{3,4}+0.2$$
$$f_{3,4}=0.2f_{3,4}+0.4$$

解得：$f_{1,4}=\frac{19}{35}$，$f_{2,4}=\frac{4}{7}$，$f_{3,4}=\frac{1}{2}$。类似可求得：$f_{1,5}=\frac{16}{35}$，$f_{2,5}=\frac{3}{7}$，$f_{3,5}=\frac{1}{2}$。

五、（15 分）

（1）$S_2(\omega)$ 是谱密度函数。$S_2(\omega)\leftrightarrow R(\tau)=-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|\tau|}+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$。

（2）该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau<\infty$。

六、（7 分）

（1）先求 $EX_t=E(S_t+\varepsilon_t)=0$，

$$\gamma_X(t,t)=E(S_t+\varepsilon_t)^2=E(S_t^2+\varepsilon_t^2)=ES_t^2+\sigma^2=E[b^2\cos^2(\omega t+U)]+\sigma^2$$
$$=\frac{b^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(2\omega t+2u)+1]du+\sigma^2=\frac{b^2}{2}+\sigma^2$$

$$\gamma_X(t+\tau,t)=EX_{t+\tau}X_t=\frac{b^2}{2}\cos\omega\tau+\delta(\tau)\sigma^2,\ (:\delta(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases})$$

从而：$EY_t=0$ 且：

$$\gamma_Y(t+\tau,t)=EY(t+\tau)Y(t)=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}EX_{t+\tau-i}X_{t-j}$$
$$=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}(\frac{b^2}{2}\cos\omega(\tau-i+j)+\delta(\tau-i+j)\sigma^2)$$

故Y_t 平稳。

（2）
$$\gamma_Y(t,t)=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{i,j=-M}^{M}(\frac{b^2}{2}\cos\omega(i-j)+\delta(i-j)\sigma^2)$$
$$=\frac{1}{(2M+1)^2}(\sum_{i,j=0}^{2M}\frac{b^2}{2}\cos\omega(i-j)+(2M+1)\sigma^2)$$
。

（完）